3 Fragen:

1) Wie lautet das Lemma von Gronwall?

3) Was ist ein dissipatives System?

2) Was besagt ~~die Stabilitätsaussage~~ der Satz zur stetigen Abhängigkeit ~~für~~ der Anfangsdaten unter den Voraussetzungen des verallg. P-L?

---

1) Sei $0 < T \leq \infty$, $t_0 \in [0,T)$, $a, b \in L^\infty(t_0,T)$, $\lambda \in L^1(t_0,T)$, $\lambda(t) \geq 0$ f.ü. auf (t_0,T).

- Gilt $a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} \lambda(s) a(s)\,ds$ f.ü.

  $\Rightarrow a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)} \lambda(s) b(s)\,ds$ f.ü., $\Lambda(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(s)\,ds$

- Ist b auf $[t_0,T]$ abs. stetig, so folgt

  $$a(t) \leq e^{\Lambda(t)} \left(b(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\Lambda(s)} b'(s)\,ds \right)$$

- Ist b monoton wachsend und stetig, so gilt $a(t) \leq b(t) e^{\Lambda(t)}$.

2) Vor. des verallg. P-L gegeben, u Lsg von $\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ auf I. Dann: $\forall v_0 \in B(u_0, r)$ $\exists v$ Lösung auf $I' \subset I$ und $\forall t \in I'$ gilt: $\|u(t) - v(t)\| \leq e^{L|t-t_0|} \|u_0 - v_0\|$.

3) $(H, (\cdot,\cdot), |\cdot|)$ HR. $f: [0,T] \times H \to H$ dissipativ, falls gilt:

$$\forall t \in [0,T], v, w \in H: \ (f(t,v) - f(t,w), v-w) \leq 0.$$

f stark dissipativ falls: $\exists \mu > 0\ \forall \ldots : (\ \ldots\ ) \leq -\mu |v-w|^2$.

AWP mit dissipativer rechter Seite heißt dissipatives System.

Vorteil: Lösungen nähern sich exponentiell an.

Tutoriumsaufgaben zur Differentialgleichungen I
10. Tutorium

Aufgabe 1
Diskretes Lemma von Gronwall: Rückwärtsdifferenzen-Form

Wir betrachten eine Folge von Ungleichungen

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\Delta t} \leq g_{n+1} + \lambda a_{n+1}, \qquad n = 0, 1, \dots,$$

wobei $(a_n), (g_n)$ reelle Folgen seien und a_0 sowie (g_n) vorgegeben sind.
Zeige, dass, falls $1 - \lambda \Delta t > 0$ ist, die obige Ungleichung die folgende Ungleichung für $n = 1, 2, \dots$ impliziert:

$$a_n \leq (1 - \lambda \Delta t)^{-n} \Big(a_0 + \Delta t \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \lambda \Delta t)^j g_{j+1} \Big).$$

Ist darüberhinaus (g_n) monoton steigend, so gilt sogar

$$a_n \leq (1 - \lambda \Delta t)^{-n} a_0 + \frac{1}{\lambda} \big((1 - \lambda \Delta t)^{-n} - 1 \big) g_n.$$

Vergleicht die Ergebnisse mit den bekannten im „differentiellen“ Lemma von Gronwall.

Aufgabe 2
Diskretes Lemma von Gronwall: Vorwärtsdifferenzen-Form

Wir betrachten eine Folge von Ungleichungen

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\Delta t} \leq g_n + \lambda a_n, \qquad n = 0, 1, \dots,$$

wobei $(a_n), (g_n)$ reelle Folgen seien und a_0 sowie (g_n) vorgegeben sind.
Zeige, dass, falls $1 + \lambda \Delta t > 0$ ist, die obige Ungleichung die folgende Ungleichung für $n = 1, 2, \dots$ impliziert:

$$a_n \leq (1 + \lambda \Delta t)^n \Big(a_0 + \Delta t \sum_{j=0}^{n-1} (1 + \lambda \Delta t)^{-(j+1)} g_j \Big).$$

Ist darüberhinaus (g_n) monoton steigend, so gilt sogar

$$a_n \leq (1 + \lambda \Delta t)^n a_0 + \frac{1}{\lambda} \big((1 + \lambda \Delta t)^n - 1 \big) g_{n-1}.$$

Vergleicht die Ergebnisse mit den bekannten im „differentiellen“ Lemma von Gronwall.

Aufgabe 3
Wir betrachten den Fredholmschen Integraloperator

$$A : L^2(-1,1) \to L^2(-1,1),$$
$$(Av)(x) := \int_{-1}^{1} k(x,\xi) v(\xi) d\xi, \quad x \in (-1,1),$$

wobei k eine stetige Funktion auf $[-1,1]^2$ sei.
Zeige, dass A wohldefiniert ist, aber $f(t,v) := -Av$ nicht stark dissipativ sein kann.

Aufgabe 1

- Setze $\tilde{a}_n := (1-\lambda\Delta t)^n a_n$.

Dann folgt $$\frac{\tilde{a}_{n+1}-\tilde{a}_n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\Big((1-\lambda\Delta t)^{n+1} a_{n+1} - (1-\lambda\Delta t)^n a_n\Big)$$

$$= \frac{1}{\Delta t}(1-\lambda\Delta t)^n \left[(1-\lambda\Delta t)a_{n+1} - a_n\right]$$

$$= (1-\lambda\Delta t)^n \left[\frac{a_{n+1}-a_n}{\Delta t} - \lambda a_{n+1}\right]$$

$$\leq (1-\lambda\Delta t)^n g_{n+1}.$$

Summation von 0 bis k-1 ergibt

$$\frac{\tilde{a}_k - \tilde{a}_0}{\Delta t} \leq \sum_{n=0}^{k-1} (1-\lambda\Delta t)^n g_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\lambda\Delta t)^k a_k - a_0}{\Delta t} \leq \sum_{n=0}^{k-1} (1-\lambda\Delta t)^n g_{n+1}$$

$$\Rightarrow (1-\lambda\Delta t)^k a_k \leq a_0 + \Delta t \sum_{n=0}^{k-1} (1-\lambda\Delta t)^n g_{n+1}$$

und somit $a_k \leq (1-\lambda\Delta t)^{-k}\left(a_0 + \Delta t \sum_{n=0}^{k-1}(1-\lambda\Delta t)^n g_{n+1}\right)$.

- Sei g nun monoton steigend, dann gilt $g_{n+1} \leq g_k \; \forall n = 0,\dots,k-1$ und somit

$$a_k \leq (1-\lambda\Delta t)^{-k}\Big(a_0 + \Delta t\, g_k \underbrace{\sum_{n=0}^{k-1}(1-\lambda\Delta t)^n}_{= \frac{1-(1-\lambda\Delta t)^k}{\lambda\Delta t}}\Big)$$

geom. Reihe: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

somit folgt insgesamt

$$a_k = (1-\lambda\Delta t)^{-k} a_0 + \frac{g_k}{\lambda}\left((1-\lambda\Delta t)^{-k} - 1\right).$$

Im Prinzip wird $a'(t_k)$ durch die Rückwärtsdifferenz an einem glm. Gitter t_k ersetzt.

$(1-\lambda\Delta t)^{-k}$ ist eine Approximation an $e^{-\lambda t}$, wenn wir Δt nicht konstant, sondern $\Delta t = \frac{1}{k}$ setzen.

Aufgabe 2

Analog zu Aufgabe 1...

$\tilde{a}_n := (1+\lambda\Delta t)^{-n} a_n$

$$\Rightarrow \quad \frac{\tilde{a}_{n+1} - \tilde{a}_n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}(1+\lambda\Delta t)^{-(n+1)}\left(a_{n+1} - (1-\lambda\Delta t)a_n\right)$$

$$= (1+\lambda\Delta t)^{-(n+1)}\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{\Delta t} - \lambda a_n\right)$$

$$\leq (1+\lambda\Delta t)^{-(n+1)} g_n .$$

Summieren ergibt

$$\frac{\tilde{a}_k - \tilde{a}_0}{\Delta t} \leq \sum_{n=0}^{k-1} (1+\lambda\Delta t)^{-(n+1)} g_n ,$$

woraus wie in Aufgabe 1 die Behauptung folgt.

Ist g monoton steigend, gilt $g_n \leq g_{k-1}$ für $n = 0, \dots, k-1$ und es folgt

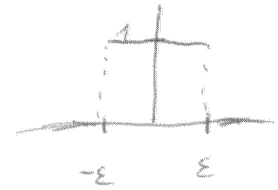
$$\sum_{n=0}^{k-1} (1+\lambda\Delta t)^{-(n+1)} g_n \leq g_{k-1} \frac{1}{\lambda\Delta t}\left(1-(1+\lambda\Delta t)^{-k}\right)$$

$\Rightarrow$ Beh.

Hier wird $a'(t_k)$ durch die Vorwärtsdifferenz approximiert und $e^{-\lambda t}$ durch $(1+\lambda\Delta t)^{-k}$.

Aufgabe 3

Sei $\varepsilon \in (0,1)$ und $v(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.



$v \in L^2(-1,1)$, denn $\|v\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^{1} v(s)\,ds = 2\varepsilon$.

Nun ist
$$(Av, v)_{L^2} = \int_{-1}^{1} (Av)(t) \cdot v(t)\,dt$$
$$= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} k(t,s) v(s)\,ds\, v(t)\,dt$$
$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} k(t,s)\,ds\,dt \le \underbrace{\max_{-1 \le t,s \le 1} |k(t,s)|}_{=:M} \cdot \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} ds\,dt}_{4\varepsilon^2}$$

Wähle nun für beliebiges $\mu > 0$: $\varepsilon < \frac{\mu}{2M}$. Dann folgt

$(Av, v)_{L^2} \le 4\varepsilon^2 M < 2\varepsilon\mu = \mu \|v\|_{L^2}^2$,

also $(-Av, v) > -\mu \|v\|^2$. Somit kann f nicht stark dissipativ sein.

Ach ja ... Wohldefiniertheit:

Bullshit

$\|Aw\|_{L^2}^2 \le \cancel{\int_{-1}^{1} |k(x,\xi)| |w(\xi)|\,d\xi \le M^2 \int_{-1}^{1} |w(\xi)|^2\,d\xi = M^2 \|w\|_{L^2}^2 < \infty}$

~~für alle~~ $\cancel{w \in L^2(-1,1)}$. $= \int_{-1}^{1} \left| \int_{-1}^{1} k(x,\xi) w(\xi)\,d\xi \right|^2 dx$

$\le \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-1}^{1} \underbrace{|k(x,\xi)|}_{\le \|k\|_{C[-1,1]} =: M} |w(\xi)|\,d\xi \Big)^2 dx \le M^2 \int_{-1}^{1} \Big(\underbrace{\int_{-1}^{1} |v(\xi)|\,d\xi}_{\le 2\|v\|_{L^2}^2 \text{ mit Hölder}} \Big)^2 dx \le 8M^2 \|v\|_{L^2}^2 < \infty$