

# Tutoriumsaufgaben zur Differentialgleichungen I

## 11. Tutorium

### Aufgabe 1:

Stabilität bei zweidimensionalen, autonomen linearen Systemen. Von welchem Typ ist der Gleichgewichtspunkt der Systeme

$$u'(t) + Au(t) = 0$$

mit

$$(i) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (ii) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (iii) A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad (iv) A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ist er stabil / asymptotisch stabil?

### Aufgabe 2:

Seien  $a > 0$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$ . Formuliere die Differentialgleichung

$$u''(t) + 2\delta u'(t) + au(t) = 0, \quad t \in [0, \infty)$$

um in ein System 1. Ordnung und untersuche dessen Nulllösung auf (asymptotische und exponentielle) Stabilität in Abhängigkeit von  $\delta$ .

### Aufgabe 3:

Untersuche die stationären Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems auf Stabilität bzw. asymptotische Stabilität:

$$\begin{aligned} u' &= -2u + uw + u^2w \\ w' &= -u - 2w + 2uw^2. \end{aligned}$$

### Aufgabe 4:

Eine Alligatorpopulation werde durch die Gleichung

$$u' = -\frac{u(u - 1500)}{3200}$$

modelliert, wobei  $u(t)$  die Größe der Population und  $t$  die Zeit in Jahren ist.

Wird nun Jägern erlaubt, eine Anzahl  $s$  von Alligatoren zu schiessen, wird ihre Gesamtpopulation durch die Gleichung

$$u' = -\frac{u(u - 1500)}{3200} - s \tag{1}$$

beschrieben.

Finde alle Gleichgewichtspunkte  $u_s$  der Gleichung (1) in Abhängigkeit des Parameters  $s \geq 0$  und untersuche deren Stabilitätsverhalten. Wie groß darf  $s$  höchstens sein, damit die Tiere nicht aussterben?

### 3 Fragen

- 1) Was ist ein Gleichgewichtspunkt?
  - 2) Wann ist ein GGP stabil?
  - 3) Wann ist ein GGP asymptotisch stabil?
- 

1)  $\bar{u} \in M$  heißt GGP von  $\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ ,

$f: [0, \infty) \times M \rightarrow X$  lok. L-Besd.,

falls  $f(t, \bar{u}) = 0 \quad \forall t \geq 0$ .

2)  $\bar{u}$  GGP stabil, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall u_0 \in M: \|u_0 - \bar{u}\| < \delta \Rightarrow \exists ! \text{Lsg } u: \|u(t) - \bar{u}\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

3)  $\bar{u}$  GGP asymptotisch stabil, falls gilt:

2) + abklingend

$$\text{d.h. } \exists \alpha > 0 \forall u_0 \in M: \|u_0 - \bar{u}\| < \alpha \Rightarrow \exists ! \text{Lsg } u: \|u(t) - \bar{u}\| \rightarrow 0$$

↙  
auf ganze  $\mathbb{R}_0^+$

## 7. Classification of planar, autonomous systems

The planar, homogeneous, autonomous systems

$$(7.1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

with  $\mathbf{A}$  a constant  $2 \times 2$  matrix can be classified according to the character of its stationary point, the origin. A similar classification is also possible for systems of higher order, but it does not add much extra information and the clarity gets lost. It is convenient to first transform  $\mathbf{A}$  into Jordan form (see Appendix C and [49]). So let  $\mathbf{S}$  be a nonsingular matrix, such that

$$(7.2) \quad \mathbf{J} := \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{S}^{-1}$$

has the Jordan block structure. The *similarity transformation* (7.2) preserves the eigenvalues. The matrix  $\mathbf{J}$  can have only a few typical forms. Our classification will be done accordingly.

(i)  $\mathbf{J}$  is a diagonal matrix:

$$(7.3) \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

In this case  $\mathbf{A}$  has two linearly independent eigenvectors  $\mathbf{v}_1$  and  $\mathbf{v}_2$ . Following (4.4) the solutions can be written as

$$(7.4) \quad \mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2(t-t_0)} \mathbf{v}_2.$$

We distinguish between three cases:

(ia)  $\lambda_1, \lambda_2$  are real and different,  $\lambda_1 < \lambda_2$  say.

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$  : the origin is a stable node. See Fig. 4a.

$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  : the origin is an unstable node. See Fig. 4b.

$\lambda_2 > 0, \lambda_1 < 0$  : the origin is a saddle point. See Fig. 4c.

(ib)  $\lambda_1, \lambda_2$  are real and equal,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  say.

$\lambda < 0$  : the origin is a stable star. See Fig. 4d.

$\lambda \geq 0$  : the origin is an unstable star. See Fig. 4e.

(ic)  $\lambda_1, \lambda_2$  are complex conjugates, say  $\lambda_1 = \lambda$  and  $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ . Then also the eigenvectors are complex conjugates, say  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$  and  $\mathbf{v}_2 = \bar{\mathbf{v}}$ . Because the solutions  $\mathbf{x}(t)$  are real, we find that the constants  $c_1, c_2$  in (7.4) are complex conjugates, say  $c_1 = c$  and  $c_2 = \bar{c}$ . Equation (7.4) then reads

$$(7.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c e^{\lambda(t-t_0)} \mathbf{v} + \bar{c} e^{\bar{\lambda}(t-t_0)} \bar{\mathbf{v}} = \\ &= 2 \operatorname{Re}(c e^{\lambda(t-t_0)} \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Introducing

$$(7.6) \quad \lambda := \alpha + i\beta, \quad \mathbf{v} := \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2, \quad c := d_1 + id_2$$

with  $\alpha, \beta, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, d_1, d_2$  real, we may express  $\mathbf{x}(t)$  in terms of real quantities only:

$$(7.7) \quad \mathbf{x}(t) = 2e^{\alpha(t-t_0)} \left\{ \left( d_1 \cos \beta(t-t_0) - d_2 \sin \beta(t-t_0) \right) \mathbf{u}_1 - \left( d_2 \cos \beta(t-t_0) + d_1 \sin \beta(t-t_0) \right) \mathbf{u}_2 \right\}.$$

If the imaginary part  $\beta$  of  $\lambda$  is non-vanishing, this causes the solutions to spiral around the origin. The real part  $\alpha$  determines whether they approach it ( $\alpha > 0$ ), leave it ( $\alpha < 0$ ), or keep circling around it ( $\alpha = 0$ ) for  $t \rightarrow \infty$ . The sign of  $\alpha$  is the classification parameter here:

$\alpha < 0$  : the origin is a stable focus. See Fig. 4f.

$\alpha > 0$  : the origin is an unstable focus. See Fig. 4g.

$\alpha = 0$  : the origin is a centre. See Fig. 4h.

The matrices  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{J}$  are connected through the transformation (7.2). If the eigenvalues are complex, one often applies an alternative similarity transformation, viz.  $\mathbf{S} := (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2)$ . In that case  $\mathbf{A}$  is similar to the real, anti-symmetric matrix

$$(7.8) \quad \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

(ii)  $\mathbf{J}$  is a non-diagonal matrix:

$$(7.9) \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

with  $\lambda$  real. The matrix  $\mathbf{A}$ , and also  $\mathbf{J}$ , has only one eigenvector,  $\mathbf{v}$  say. The solutions of the *canonical form*

$$(7.10) \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J} \mathbf{y}$$

of (7.1) are given by

$$(7.11) \quad \mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{J}(t-t_0)} \mathbf{y}_0 = e^{\lambda(t-t_0)} \left\{ y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} t-t_0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

for arbitrary  $\mathbf{y}_0 = (y_1, y_2)^T$  (cf. Appendix C). The solutions of (7.1) then are given by

$$(7.12) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{S} \mathbf{y}(t) = e^{\lambda(t-t_0)} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2(t))$$

with  $\mathbf{p}_1$  a constant vector and  $\mathbf{p}_2(t)$  a linearly independent vector, whose elements are polynomials in  $t$  of degree  $\leq 1$ , i.e.  $\mathbf{p}_2(t)$  is a linear function of  $t$ . The sign of  $\lambda$  determines the character of the system:

$\lambda < 0$  : the origin is a stable improper node. See Fig. 4i.

$\lambda > 0$  : the origin is an unstable improper node. See Fig. 4j.

aus: Mathelij/Molenaar: Ordinary Differential Equations  
 in Theory and Practice, SIAM, 2002

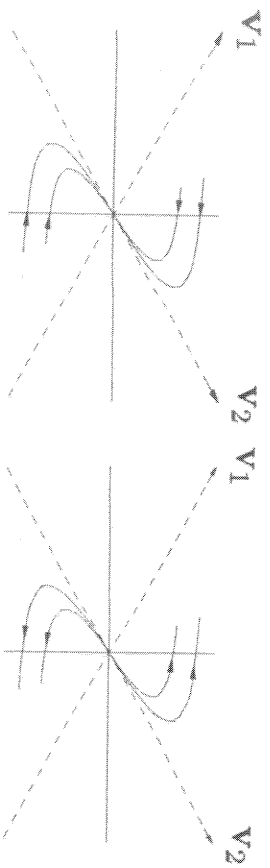


Fig. 4a. Stable node.

Fig. 4b. Unstable node.

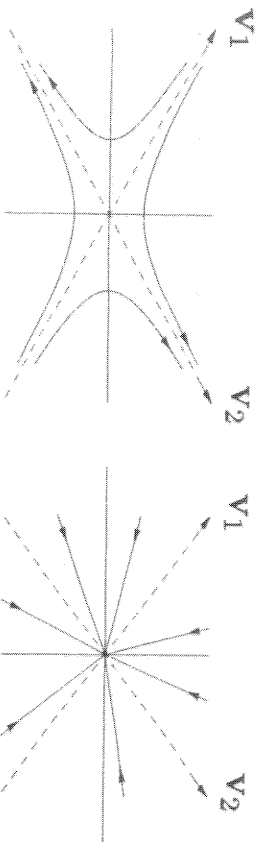


Fig. 4c. Saddle point.

Fig. 4d. Stable star.

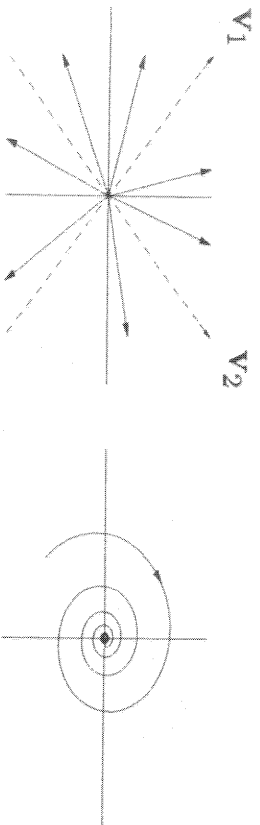


Fig. 4e. Unstable star.

Fig. 4f. Stable focus.

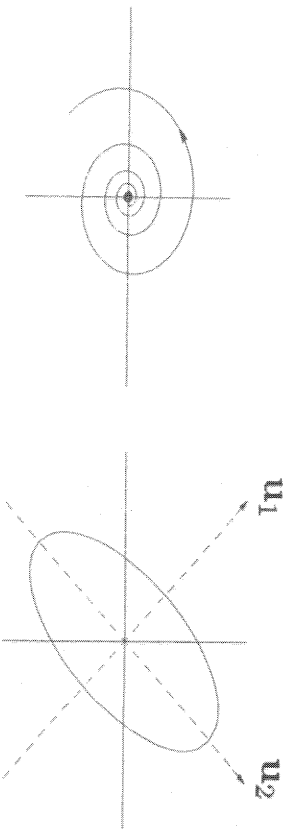


Fig. 4g. Unstable focus.

Fig. 4h. Centre.

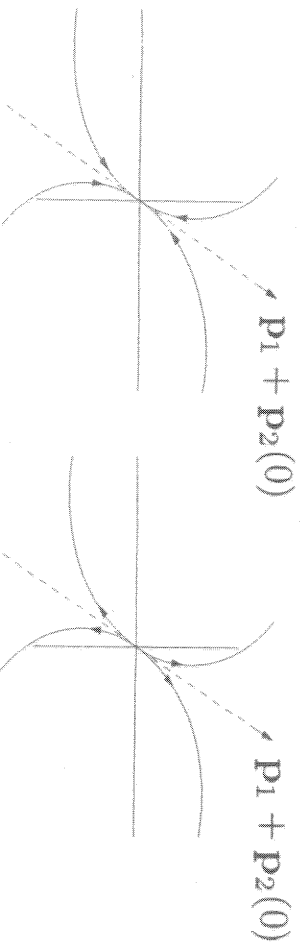


Fig. 4i. Stable improper node. Fig. 4j. Unstable improper node.

## Aufgabe 1

Achtung: Bei mir steht A auf der anderen Seite!

Die Vorzeichen drehen nicht um!

$$i) \text{ EW}(A) = \{2, -1\} \Rightarrow \text{EW}(-A) = \{-2, 1\}$$

$\Rightarrow$  saddle point (also instabil)

$$ii) \text{ EW}(A) = \{1, 5\} \Rightarrow \text{EW}(-A) = \{-1, -5\}$$

$\Rightarrow$  stabile node (sogar exponentiell)

$$iii) \text{ EW}(-A) = \{-2\} \text{ (doppelter EW)}$$

$\Rightarrow$  stabile star (exponentiell)

$$iv) \text{ EW}(-A) = \{+\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\} \text{ mit } \text{Re}(A) = 0$$

$\Rightarrow$  center  $\Rightarrow$  stabil, aber nicht asympt. stabil

## Aufgabe 2

Die DGL unformaliter lautet mit  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$v' + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a & 2\delta \end{pmatrix}}_{=: A} v = 0.$$

Die EW von  $-A$  sind  $\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - a}$ .

Fall 1:  $\delta^2 \geq a$

- $\delta \neq 0$ : dann folgt  $-\delta + \sqrt{\delta^2 - a} > 0$   
 $\Rightarrow 0$  ist instabil

- $\delta \neq 0$ : dann gilt  $\delta > \sqrt{\delta^2 - a} \Leftrightarrow -\delta < -\sqrt{\delta^2 - a}$   
 $\Leftrightarrow -\delta + \sqrt{\delta^2 - a} < 0$

da  $-\delta - \sqrt{\delta^2 - a} < 0$  trivialerweise gilt,  
ist die DGL exponentiell stabil.

- $\delta = 0$ : geht nicht wegen  $\delta^2 \geq a > 0$ .

Fall 2:  $\delta^2 < a$

Dann ist  $\operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) = -\delta$ .

- $\delta > 0 \Rightarrow 0$  ist exp. stabil
- $\delta < 0 \Rightarrow 0$  ist instabil
- $\delta = 0 \Rightarrow 0$  ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil

### Aufgabe 3

Wir definieren  $v := \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ , dann hat die <sup>den</sup> betrachtende DGL-System die Form

$$v' + A v = f(v)$$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } f(v) = \begin{pmatrix} uv + u^2 w \\ 2uw^2 \end{pmatrix}.$$

Offenbar gilt  $f(v) = o(\|v\|)$ , sodass der Satz von Invarianz anwendbar ist.

Wegen  $\operatorname{Re}(\lambda) \operatorname{Ew}(-A) = -2$  ist die Nulllösung exponential stabil.

## Aufgabe 4

$$\text{Es gilt } -\frac{u(u-1500)}{3200} - s = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 1500u + 3200s = 0$$

$$\Rightarrow u_{1,2} = 750 \pm \sqrt{750^2 - 3200s}$$

Dies sind die GGPs.

Dann gilt:

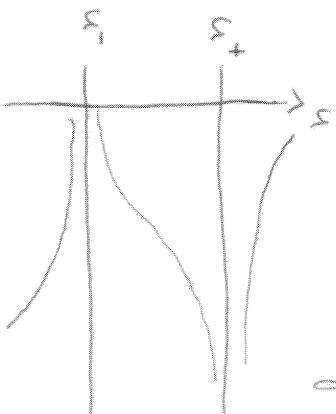
$$u' < 0, \text{ falls } u > u^+ = 750 + \sqrt{\quad}$$

$$\text{oder } u < u^- = 750 - \sqrt{\quad}$$

$$\text{und } u' > 0 \text{ falls } u^- < u < u^+.$$

Somit ist  $u^-$  instabil und  $u^+$  asymptotisch stabil.

Es ergibt sich das Bild:



Damit die Abgleichsrate nicht ansteigt, muss  
somit Anfangsproduktion  $= u_0 > u^-$ ,

d.h.  $s$  muss so gewählt sein, dass  $u_0 > u^-$  gilt.

