Tutoriumsaufgaben zur Differentialgleichungen I
12. Tutorium

Aufgabe 1:
Training Lösungsmethoden: Löse die folgenden RWP:

(i)

$$\begin{cases} -u''(x) - 4u(x) = -4x, \quad x \in (-\pi, \pi), \\ u(-\pi) = u(\pi), \\ u'(-\pi) = u'(\pi) \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} x^2 u''(x) - x(2+x)u'(x) + (2+x)u(x) = x^3, \quad x \in (1,2), \\ u(1) = -1, \\ u(2) = -4 + 2e \end{cases}$$

Aufgabe 2:
Diskutiere das Lösungsverhalten von Dirichlet-Randwertproblemen für die Differentialgleichung

$$-u''(x) + 3u'(x) - 2u(x) = -x^2, \quad x \in (a,b),$$

in Abhängigkeit von a, b, α, β.
Was geschieht, wenn der Koeffizient 3 vor u' durch 2 ersetzt wird?

Aufgabe 3:
Betrachte das semilineare Randwertproblem mit inhomogenen Neumann-Randbedingungen:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \quad x \in (a,b), \\ u'(a) = \alpha, \ u'(b) = \beta. \end{cases}$$

Transformiere dieses Problem in ein äquivalentes mit homogenen Randbedingungen.

Aufgabe 4:
Zeige, daß es für genügend glattes c stets gelingt, die allgemeine Aufgabe

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x), & x \in (a,b) \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases}$$

vermöge der Transformation

$$\widetilde{u}(x) := u(x)\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_a^x c(\xi)d\xi\Big), \quad x \in [a,b]$$

in das symmetrisches Problem

$$\begin{cases} -\widetilde{u}''(x) + \widetilde{d}(x)\widetilde{u}(x) = \widetilde{f}(x), & x \in (a,b) \\ \widetilde{u}(a) = \alpha, \\ \widetilde{u}(b) = \beta\exp\big(-\frac{1}{2}\int_a^x c(\xi)d\xi\big) \end{cases}$$

umzuwandeln, wobei

$$\widetilde{d}(x) := d(x) + \frac{1}{4}c(x)^2 - \frac{1}{2}c'(x), \quad \widetilde{f}(x) := f(x)\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_a^x c(\xi)d\xi\Big)$$

ist.
Diskutiere den Namen „symmetrisches Problem“.

· 3 Fragen

1) Was ist eine schwache Lyapunov-Funktion?

2) Stelle ein semilineares RWP (2ter Ordnung) mit homogenen Dirichlet-RB auf.

3) Nenne 2 weitere Arten von RB.

---

1) $V: B_a(\bar{u}_0) \to \mathbb{R}$ stetig diffbar heißt schwache Lyapunov-Fkt der Ruhelage $\bar{u}$, falls gilt: $\underbrace{\nabla V(u) \cdot f(u)}_{= \frac{d}{dt} V(u(t))} \leq 0 \quad \forall u \in B_a(\bar{u})$.

(gilt $V(\bar{u}) < V(u) \quad \forall u \in B_a(\bar{u}) \setminus \{\bar{u}\}$ so ist $\bar{u}$ stabil)

2) $$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) & \text{in } (a,b) \\ u(a) = 0, \; u(b) = 0 \end{cases}$$

3) Dirichlet (inhomogen): $u(a) = \alpha, \; u(b) = \beta$

Neumann: $u'(a) = \alpha, \; u'(b) = \beta$

Robin: $c_a u(a) + u'(a) = \alpha, \; c_b u(b) + u'(b) = \beta$

Periodisch: $u(a) = u(b), \; u'(a) = u'(b)$

Gemischt: gemischt

Aufgabe 1

i) $\begin{cases} -u''(x) - 4u(x) = -4x & , x \in (-\pi, \pi) \\ u(-\pi) = u(\pi) , & u'(-\pi) = u'(\pi) \end{cases}$

Homogene Gleichung: $-u'' - 4u = 0$

$\Rightarrow$ Exponentialansatz; charakt. Glg hat die Form $-\lambda^2 - 4\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i$.

Somit ist ein FS gegeben durch $\begin{matrix} u_1(x) = \cos(2x) \\ u_2(x) = \sin(2x) \end{matrix}$,

das heißt die allgemeine Lösung der homog. Glg lautet

$$u_h(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

Für die partikuläre Lösung: Ansatz der rechten Seite.

$u_p(x) = ax + b$

$\Rightarrow u_p'(x) = a , u_p''(x) = 0$.

Einsetzen in die DGL bringt $-4ax - 4b \stackrel{!}{=} -4x$.

$\Rightarrow b = 0$ und $a = 1$

$\Rightarrow u_p(x) = x$.

Also hat die allg. Lsg der DGL die Form

$$u(x) = x + c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x).$$

RB: $u(-\pi) = \cancel{a} -\pi + c_1 \stackrel{!}{=} \pi + c_1 = u(\pi)$. ↯

$\Rightarrow$ RWP hat keine Lsg!

Aufgabe 1

ii) $\begin{cases} x^2 u''(x) - x(2+x)\,u'(x) + (2+x)\,u(x) = x^3 & , x \in (1,2) \\ u(1) = -1,\ u(2) = -4+2e \end{cases}$

bzw $\quad -u''(x) + \underbrace{\frac{2+x}{x}}_{c(x)} u'(x) - \underbrace{\frac{2+x}{x^2}}_{d(x)} u(x) = -x$

Homogene Gln: $\quad -u'' + c u' + d u = 0.$

Eine Lösung ist $u_1(x) = x$.

Zweite Lösung mit d'Alembert: $\quad u_2(x) = x \int_{x_0}^{x} v(\xi)\,d\xi$

$\Rightarrow u_2'(x) = \int_{x_0}^{x} v(\xi)\,d\xi + x\,v(x)$

$u_2''(x) = v(x) + v(x) + x\,v'(x)$

Einsetzen von u_2 in die homog. Gln. ergibt $v' = v$.

$\Rightarrow \quad v(x) = e^x$

$\Rightarrow \quad u_2(x) = x e^x$

$\Rightarrow \quad u_h(x) = c_1 u_1 + c_2 u_2 = c_1 x + c_2 x e^x.$

Partikuläre Lsg durch Variation der Konstanten:

$u_p(x) = c_1(x)\,x + c_2(x)\,x e^x$

$u_p'(x) = c_1'(x)\,x + c_1(x) + c_2'(x)\,x e^x + c_2(x)\,e^x(1+x)$

Da c_1 und c_2 nur durch (bis jetzt) eine Gleichung (die DGL) bestimmt werden, wähle als 2te Gln: $\boxed{c_1'(x)\,x + c_2'(x)\,x e^x \overset{!}{=} 0}$

$\Rightarrow \quad u_p'(x) = c_1(x) + c_2(x)\,e^x(1+x)$

$\Rightarrow \quad u_p''(x) = c_1'(x) + c_2'(x)\,e^x(1+x) + c_2(x)\,e^x(2+x)$

Einsetzen in die DGL:

$$x^2 c_1' + x^2 c_2' e^x (1+x) + \cancel{c_2 x^2 e^x (2+x)} - \cancel{x(2+x)c_1} - \cancel{x(2+x) c_2 x e^x (1+x)}$$

$$+ \cancel{(2+x) c_1 x} + \cancel{(2+x) c_2 x e^x} \overset{!}{=} x^3$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 c_1' + x^2 c_2' (1+x) e^x \overset{!}{=} x^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{c_1' + c_2' (1+x) e^x \overset{!}{=} x}$$

Und somit

$$-c_2' e^x + (1+x) c_2' e^x = c_2' x e^x \overset{!}{=} x$$

$$\Rightarrow \quad c_2' = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad c_1' = -1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -x$$

Somit $u_p(x) = -x^2 - \underbrace{\cancel{x}}_{\text{homog. Lsg}}$

$$\Rightarrow \quad u(x) = c_1 x + c_2 x e^x - x^2 \quad \text{(allg. Lsg der DGL)!}$$

RB's:

$$-1 = u(1) = c_1 + c_2 e - 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_2 e$$

$$-4 + 2e = u(2) = 2c_1 + 2c_2 e^2 - 4$$

$$\Rightarrow \quad 2c_1 + 2c_2 e^2 = 2e \quad \Rightarrow \quad -c_2 e + c_2 e^2 = e$$

$$\Rightarrow 1 + c_2 = c_2 e \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{e-1} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{-e}{e-1}$$

Aufgabe 2

$$-u'' + 3u' - 2u = -x^2$$

$\Rightarrow \quad c = 3, \; d = -2.$

$\Rightarrow \quad D := \frac{c^2}{4} + d = \frac{9}{4} - 2 > 0$

Somit hat die homogene Gleichung $\forall a, b, \alpha, \beta$ genau eine Lösung.
Also hat auch die inhom. Gleichung genau eine Lösung:

Ansatz der rechten Seite:

$$u_p(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow u_p' = 2ax + b \;, \; u_p'' = 2a$$

einsetzen: $-2a + 3b + 6ax - 2ax^2 - 2bx - 2c \overset{!}{=} -x^2$

Koeffizientenvergleich ergibt $a = \frac{1}{2}$, $6a - 2b = 0$, $3b - 2a + 2c = 0$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$b = \frac{3}{2} \qquad\qquad c = \frac{7}{4}$$

Also ist $u_p(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$.

Da die homogene Gl. für beliebige Randwerte lösbar ist,
ist ~~so~~ auch die inhomogene Gl. für bel. RBs lösbar.

Nun: $-u'' + 2u' - 2u = -x^2$.

$\Rightarrow \quad D = \frac{c^2}{4} + d = -1 < 0$. Somit hat die homog. Gl.

(1) genau eine Lsg, falls $(b-a) \neq k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

(2) unendlich viele Lsg, falls $\exists k \in \mathbb{Z} : (b-a) = k\pi$
und $\beta = (-1)^k \alpha \, e^{(b-a)}$

(3) keine Lsg sonst.

Entsprechende Aussagen gelten für das inhomogene Problem,
wobei nun $\hat{\alpha} := \alpha + u_p(a)$ und $\hat{\beta} := \beta + u_p(b)$ zu verwenden sind.

Aufgabe 3

Definiere $r(x) = \beta \frac{x-a}{b-a} + \alpha \frac{x-b}{a-b}$.

$\Rightarrow r(a) = \alpha$ und $r(b) = \beta$.

Definiere $R(x) = \int_0^x r(\xi)\, d\xi = \frac{\beta}{2} \frac{(x-a)^2}{b-a} + \frac{\alpha}{2} \frac{(x-b)^2}{a-b}$.

Dann erfüllt $\tilde{u} := u - R$ die RB's.

Sei weiterhin $\tilde{f}(x, v, w) := f(x, v+R, w+R') + R''$,

so ist das gegebene Problem äquivalent zu

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' = \tilde{f}(x, \tilde{u}, \tilde{u}') \\ \tilde{u}'(a) = \tilde{u}'(b) = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4

$$\tilde{u} = u\, e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} c(\xi)\, d\xi}$$

$$\tilde{u}' = u' e^{\cdots} + u e^{\cdots} \left(-\tfrac{1}{2} c(x)\right) = e^{\cdots} \left(u' \cancel{+} - \tfrac{1}{2} u c\right)$$

$$\tilde{u}'' = u'' e^{\cdots} + u' e^{\cdots} \left(-\tfrac{1}{2} c(x)\right) + u' e^{\cdots} \left(-\tfrac{1}{2} c(x)\right) + u\, e^{\cdots} \left(-\tfrac{1}{2} c(x)\right)^2 + u\, e^{\cdots} \left(-\tfrac{1}{2} c'(x)\right)$$

$$= e^{\cdots} \left(u'' - u'c + u \cancel{\xi} \frac{c^2}{4} - u \frac{c'}{2}\right)$$

Multiplizieren von $-u'' + cu' + du = f$ mit $e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} c(\xi) d\xi}$ ergibt

$$e^{\cdots} \left(-u'' + cu' + du\right) = \hat{f}.$$

Nullergänzung von $\frac{1}{2} uc' + \frac{1}{4} uc^2 - \frac{1}{2} uc' - \frac{1}{4} uc^2$ in der Klammer und anschließendes Trennen ergibt

$$\underbrace{e^{\cdots} \left(-u'' + cu' + \tfrac{1}{2} uc' - \tfrac{1}{4} uc^2\right)}_{= -\tilde{u}''} + \underbrace{e^{\cdots} \left(-\tfrac{1}{2} uc' + \tfrac{1}{4} uc^2 + du\right)}_{= \left(-\frac{1}{2} c' + \frac{1}{4} c^2 + d\right) \hat{u} \;=\; \hat{d}\, \hat{u}} = \hat{f}$$

Analog anders herum. ~~Somit sind f~~
Die Transformation der RB's ist trivial.
Somit sind die Probleme äquivalent.

<u>Symmetrisches Problem:</u>

Formal ist $Au := -u'' + du$ ein linearer (unbeschränkter) Operator.
Ohne Rücksicht auf Definitionsbereiche gilt dann

$$(Au, v) = \int_a^b (-u'' + du)\, v\, dx = \int_a^b -u''v + duv\, dx = -u'v\Big|_a^b + \int_a^b u'v'\, dx + \int_a^b duv\, dx$$

$$= -u'v\Big|_a^b + uv'\Big|_a^b + \int_a^b (-v'' + dv)\, u\, dx = (u, Av),$$

falls geeignete RB's formuliert werden, sodass die Randterme wegfallen.