Tutoriumsaufgaben zur Differentialgleichungen I
14. Tutorium

Aufgabe 1:
Vergleiche die Aussagen der verschiedenen Sätze aus der Vorlesung zur eindeutigen Lösbarkeit des linearen Randwertproblems mit homogenen DIRICHLET-Randbedingungen. Unter welchen Bedingungen an c ist die eine Aussage schärfer als die andere?

Aufgabe 2:
Wir betrachten nochmals ein Randwertproblem vom 12. Aufgabenblatt, nämlich

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u'(x) + 8u(x) = 6(1 - 4x^2)e^{4x}, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Bestimme nun die Greensche Funktion und mithilfe derer die Lösung des inhomogenen Problems.

Aufgabe 3:
Beweise für die Green'sche Funktion

$$G(x,\xi) = \frac{1}{RW(\xi)} \begin{cases} A(\xi)B(x), & a \le \xi \le x \le b, \\ A(x)B(\xi), & a \le x \le \xi \le b, \end{cases}$$

mit

$$A(x) := \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{vmatrix}, \; B(x) := \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{vmatrix}, \; R := \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{vmatrix},$$

und $W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)$ die Beziehung

$$\frac{d}{dx}\int_a^b G(x,\xi)d\xi = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi)d\xi.$$

Aufgabe 4:
Untersuche das semilineare Randwertproblem

$$-u''(x) = |u(x)|, \quad x \in (0,b), \quad u(0) = 0, \; u(b) = \beta,$$

in Abhängigkeit von b und β auf Lösbarkeit und bestimme, wenn möglich, die Lösungen.

3 Fragen

1) Wie lautet das Maximumprinzip?

2) Wie ist die Green'sche Funktion

zu $\begin{cases} -u''(x) + c\,u'(x) + d(x)\,u(x) = f(x) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ definiert?

3) Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?

---

1) Es sei $Lv := -v'' + c\,u' + d\,u$. Gilt $d \geq 0$ auf $[a,b]$, dann folgt für beliebige $v \in C^2(a,b) \cap C([a,b])$:

i) $(Lv)(x) \leq 0$ auf (a,b) $\Rightarrow$ $v(x) \leq \max\{v(a), v(b), 0\}$

ii) $(Lv)(x) \geq 0$ auf (a,b) $\Rightarrow$ $v(x) \geq \min\{v(a), v(b), 0\}$ auf $[a,b]$.

~~auf $[a,b]$~~

2)
$$g(x,\xi) = \frac{1}{R\,W(\xi)} \cdot \begin{cases} A(\xi)\,B(x), & a \leq \xi \leq x \leq b \\ A(x)\,B(\xi), & a \leq x \leq \xi \leq b. \end{cases}$$

mit $W(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix}$

$A(x) = \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{vmatrix}$, $B(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{vmatrix}$, $R = \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{vmatrix}$

Aufgabe 1

Wir betrachten $\begin{cases} -u'' + cu' + du = 0 \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$

mit c, d stetig.

Wir haben 2 Bedingungen, die garantieren, dass nur die triviale Lösung das Problem löst:

Satz 1: $d + \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}c' \geq 0$

Satz 2: $d \geq 0$

Somit folgt, dass Satz 1 schärfer ist, falls

$$\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}c' \geq 0 \text{ ist,}$$

d.h. $c^2 \geq 2c'$.

Aufgabe 2

Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$u_1(x) = e^{-2x}, \quad u_2(x) = e^{4x}.$$

Damit gilt

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{4x} \\ -2e^{-2x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 6e^{2x},$$

$$A(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-2x} & e^{4x} \end{vmatrix} = e^{4x} - e^{-2x}$$

$$B(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{4x} \\ e^{-2} & e^{4} \end{vmatrix} = e^{4-2x} - e^{4x-2}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-2} & e^{4} \end{vmatrix} = e^4 - e^{-2}.$$

Somit ist

$$G(x,\xi) = \frac{1}{R\,W(\xi)} \begin{cases} A(\xi)\,B(x) & a \le \xi \le x \le b \\ A(x)\,B(\xi) & a \le x \le \xi \le b \end{cases}$$

$$= \frac{1}{(e^4 - e^{-2})\,6e^{2\xi}} \begin{cases} (e^{4\xi} - e^{-2\xi})(e^{4-2x} - e^{4x-2}) \\ (e^{4x} - e^{-2x})(e^{4-2\xi} - e^{4\xi-2}) \end{cases}.$$

Also gilt

$$u(x) = \frac{(e^{4-2x} - e^{4x-2})}{e^4 - e^{-2}} \int_0^x (e^{\cancel{2\xi}6\xi} - \cancel{e^{4\xi}}\,1)(1 - 4\xi^2)\,d\xi$$

$$+ \frac{(e^{4x} - e^{-2x})}{e^4 - e^{-2}} \int_x^1 (e^4 - e^{6\xi-2})(1 - 4\xi^2)\,d\xi.$$

Bezeichnen wir die beiden Integrale mit I_1 und I_2, so folgt mit doppelter partieller Integration

$$I_1 = e^{6x}\left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{7}{54}\right) + \frac{4}{3}x^3 - x - \frac{7}{54}$$

$$I_2 = e^{6x-2}\left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{7}{54}\right) + e^4\left(\frac{3}{2}x^3 - x - \frac{1}{54}\right).$$

Wer Spaß daran hat, kann u jetzt noch vereinfachen.

Aufgabe 3

Offenbar gilt

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} = \frac{1}{R\,W(\xi)} \begin{cases} A(\xi)\,B'(x) & a \le \xi \le x \le b \\ A'(x)\,B(\xi) & a \le x \le \xi \le b \end{cases},$$

wobei alle auftretenden Terme wohldefiniert sind, da A und b aus Fundamentallösungen konstruiert wurden.

Desweiteren gilt

$$\frac{d}{dx}\int_a^b G(x,\xi)\,d\xi = \frac{d}{dx}\left(\frac{B(x)}{R\cancel{W(\xi)}}\int_a^x \frac{A(\xi)}{W(\xi)}\,d\xi + \frac{A(x)}{R}\int_x^b \frac{B(\xi)}{W(\xi)}\,d\xi\right)$$

$$= \frac{B'(x)}{\cancel{W}R}\int_a^x \frac{A(\xi)}{W(\xi)}\,d\xi + \frac{B(x)}{R}\cdot\frac{A(x)}{W(x)}$$

$$+ \frac{A'(x)}{R}\int_x^b \frac{B(\xi)}{W(\xi)}\,d\xi - \frac{A(x)}{R}\,\frac{B(x)}{W(x)}$$

$$= \int_a^x \frac{A(\xi)\,B'(x)}{R\,W(\xi)}\,d\xi + \int_x^b \frac{A'(x)\,B(\xi)}{R\,W(\xi)}\,d\xi$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi)\,d\xi\,.$$

Aufgabe 4

- Die rechte Seite $f(x,u) = -|u|$ ist stetig und erfüllt eine L-Bed. bzgl. u mit $L = 1$:

$$\big| -|u| + |v| \big| = \big| |v| - |u| \big| \leq |v - u| .$$

Eine Lösung der DGL ist eine Lösung von

(1) $u'' - u = 0$ falls $u(x) < 0$ ist

(2) $u'' + u = 0$ falls $u(x) \geq 0$ ist.

Die allg. Lsg von (1) ist

$$u(x) = \tilde{c}_1 e^{x} + \tilde{c}_2 e^{-x} = c_1 \sinh(x) + c_2 \cosh(x) .$$

Die allg. Lsg von (2) ist

$$u(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x .$$

- Behauptung: Ist u Lsg der DGL und $\exists\, x_0 : u(x_0) = 0,\ u'(x_0) < 0$.
  Dann hat u keine weitere Nullstelle.

Beweis: Wegen Stetigkeit erfüllt u auf $[x_0, x_1)$ die DGL (1).
Ang., es $\exists\, x_1$ mit $u(x_1) = 0$, $x_1 > x_0$. Wegen $u'(x_0) < 0$ und u' stetig folgt, dass es ein $x^* \in (x_0, x_1)$ geben muss mit $u'(x^*) = 0$, $u''(x^*) > 0$ (Minimum).
$\lightning$ zu (1).
Also gilt $x_1 = \infty$ und u hat keine weiteren Nullstellen.

- <u>Behauptung:</u> Ist u Lsg der DGL und $u'(x_0) > 0$, $u(x_0) = 0$, dann hat u genau eine weitere Nullstelle bei $x_0 + \pi$.

Beweis: u ist in einer Umgebung von x_0 positiv, erfüllt also (2).

Die allg. Lsg von $u'' + u = 0$, $u(x_0) = 0$ ist $u(x) = c \cdot \sin(x - x_0)$.

Diese hat eine zweite Nullstelle bei $x = x_0 + \pi$.

Es kann keine weitere Nullstelle ~~konvex~~ geben, da u ~~konvex~~ konkav ist!

- <u>Fall 1: $b < \pi$</u>

Dann gibt es in $(0,b)$ keine weitere Nullstelle (es sei denn $u \equiv 0$).

Somit löst
$$u(x) = \begin{cases} c \sin x & , \ \beta > 0 \\ -c \sinh x & , \ \beta < 0 \\ 0 & , \ \beta = 0 \end{cases}$$
die DGL und $u(0) = 0$.

c bestimmen wir aus $u(b) = \beta$ zu
$$c = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\sin \beta} & \beta > 0 \\ -\dfrac{\beta}{\sinh \beta} & \beta < 0 \end{cases}$$

Das RWP ist also für $b < \pi$ eindeutig lösbar.

Vgl: ~~obwohl~~ $\frac{\pi^2}{(b-a)^2} = \frac{\pi^2}{b^2} > 1 = L$.

- Fall 2: $b = \pi$

- Ist $\beta = 0$, so löst für jedes $c \geq 0$ $u(x) = c \sin x$ das RWP, es gibt also unendlich viele Lösungen.
- Ist $\beta < 0$, so löst $u(x) = \frac{\beta}{\sinh \pi} \sinh x$ das RWP eindeutig.
- Ist $\beta > 0$, so gibt es keine Lösung (s.u.).

- Fall 3: $b > \pi$

- Ist $\beta > 0$, so gibt es keine Lösung, denn im Fall $u'(0) > 0$ hat die Lsg u ~~kaum~~ eine Nullstelle bei π (und damit keine weitere), für $u'(0) < 0$ bleibt die Lösung immer negativ, für $u'(0) = 0$ hat man die Nullösung.
- Ist $\beta = 0$ so ist $u(x) \equiv 0$ die einzige Lösung, denn keine nichttriviale Lösung mit $u(0) = 0$ ~~ka~~ hat eine Nullstelle bei $x > \pi$.
- $\beta < 0$: Es gibt $\underline{\underline{2}}$ Lösungen:

  Eine Lösung ist $u_1(x) = \frac{\beta}{\sinh(b)} \sinh(x)$.

  Eine zweite setzen wir zusammen aus Lösungen von (1) und (2):

Die allg. Lsg von (1) ist $u_I(x) = c_1 \sinh(x) + c_2 \cosh(x)$,
die — " — (2) ist $u_{II}(x) = d_1 \sin(x) + d_2 \cos(x)$.

Wir setzen $u_2(x) = \begin{cases} u_{II}(x), & 0 \le x \le \pi \\ u_{\cancel{II}I}(x), & \pi \le x \le b. \end{cases}$

Die Konstanten bestimmen sich wie folgt:

$u_2(0) = 0$ liefert $\overset{\cancel{c_2}\, d_2}{\cancel{d_2}} = 0$.

Bei π soll die Lösung stetig sein, also wegen $u_{II}(\pi) = 0$:

$$0 \overset{!}{=} u_{\cancel{II}I}(\pi) = c_1 \sinh \pi + c_2 \cosh \pi$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = -c_1 \tanh \pi,$$

also $u_2(x) = \begin{cases} d_1 \sin x, & 0 \le x \le \pi \\ c_2(\sinh x - \tanh \pi \cosh x), & \pi \le x \le b. \end{cases}$

$$\beta \overset{!}{=} u_2(b) = c_1 (\sinh b - \tanh \pi \cosh b),$$

also $c_1 = \dfrac{\beta}{\sinh b - \tanh \pi \cosh b}$.

Schließlich bestimmen wir d_1 so, dass u_2' an der Stelle π stetig ist:

$$u_{II}'(\pi) = d_1 \cos \pi = -d_1 \overset{!}{=} \beta \frac{\cosh \pi - \tanh \pi \cdot \sinh \pi}{\sinh b - \tanh \pi \cosh b} = u_I'(\pi)$$

$$\Rightarrow \quad d_1 = -\beta \frac{\cosh^2 \pi - \sinh^2 \pi}{\cosh \pi \sinh b - \sinh \pi \cosh b} = -\beta \frac{1}{\sinh(b-\pi)}$$

Somit haben wir $u_2(x) = \begin{cases} -\dfrac{\beta}{\sinh(b-\pi)} \sin x & 0 \le x \le \pi \\ \dfrac{\beta}{\sinh(b-\pi)} \sinh(x-\pi) & \pi \le x \le b \end{cases}$

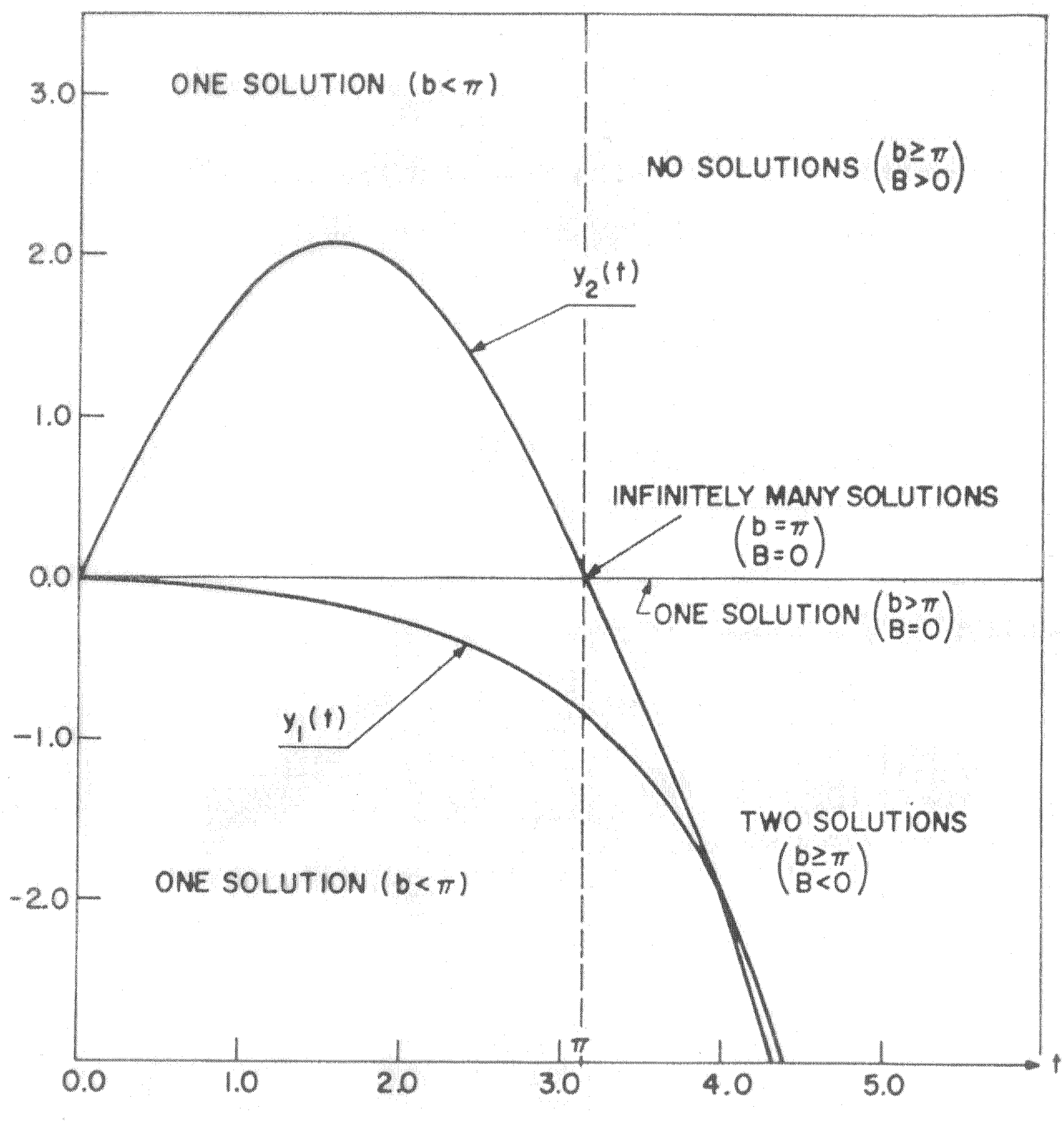

Fig. 1.1. The number of solutions of the boundary value problem

$$y''(t) + |y(t)| = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(b) = B$$

depends upon the magnitude of b and the sign of B.