Tutoriumsaufgaben zur Differentialgleichung I
2. Tutorium

Aufgabe 1
Löse das Problem wo möglich mit der Charakteristikenmethode

$$\begin{cases} u_t(x,t) + 2u_x(x,t) = u(x,t) + t, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aufgabe 2
Löse die Wärmeleitgleichung mit periodischen Randwertbedingungen (z.B. Wärmeverteilung in einem Ring):

$$\begin{cases} u_t - \mu u_{xx} = 0 & x \in (-l,l),\ t > 0 \\ u(l,t) = u(-l,t) & t > 0 \\ u_x(l,t) = u_x(-l,t) & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (-l,l). \end{cases}$$

Aufgabe 3
Wir betrachten das Cauchyproblem der Wärmeleitgleichung

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = H(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei H die Heavysidefunktion ist mit

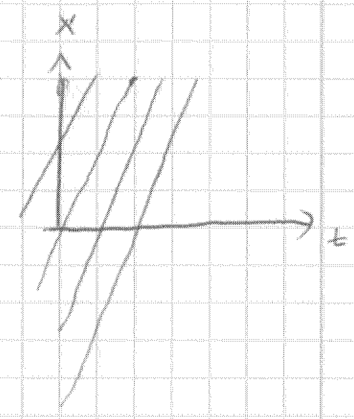
$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

1. Zeigen, dass
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2}\,ds$$
für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ die DGL löst.
2. Zeige, dass $u(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist (Glättungseigenschaft).
3. Zeige, dass $u(0,t) = \frac{1}{2}$ für alle $t > 0$ gilt.
4. Sei $x \neq 0$ fest. Zeige $\lim_{t \searrow 0} u(x,t) = H(x)$.

Hinweis: Es darf $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}$ benutzt werden.

Aufgabe 4
Beweise:
Sei $f : [0,T] \times X \to X$ stetig. Dann bildet der zugehörige Nemyzki-Operator $C([0,T],X)$ in sich ab.

Aufgabe 1



- $x_c'(t) = 2 \Rightarrow x_c(t) = 2t + x_c(0)$

- $U' = U + t$

$$\Rightarrow U(t) = e^t U(0) + \int_0^t e^{t-s} s \, ds$$

$$= e^t (U(0) + 1) - t - 1$$

wegen $\int_0^t e^{-s} s \, ds = \left[-e^{-s} s \right]_0^t - \int_0^t e^{-s} ds = -te^{-t} - e^{-t} + 1$

- $U(t) = u(x_c(t), t)$

(x,t) gegeben $\Rightarrow$ (x,t) liegt auf der Geraden $x_c(t) = 2t + x_c(0)$

$$\rightarrow u(x,t) = U(t) = e^t (U(0)+1) - t - 1$$

$$= e^t (u_0(x_c(0)) + 1) - t - 1$$

$$= e^t (u_0(x - 2t) + 1) - t - 1$$

Aufgabe 3

i) $u_x(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$, $u_{xx}(x,t) = -\frac{x}{4\sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$u_t(x,t) = -\frac{x}{4\sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$

ii) für festes t ist $u_x(x,t)$ von der Form $a e^{f(x)}$ mit dem Polynom $f(x)$

$\Rightarrow a e^{f(\cdot)} \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow u_x(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{R})$

$\Rightarrow u(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{R})$

iii) $u(0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds}_{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}$

da e^{-s^2} symmetrisch

iv) $x > 0$: $\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = 1$

$x < 0$: $\lim_{t \searrow 0}$ $= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} e^{-s^2} ds = 0$

Aufgabe 2

Ansatz $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ führt zu

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\mu T(t)} = \text{const} = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow \quad T(t) = e^{-\lambda^2 \mu t}$$

$$X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$$

mit $X'(x) = A\lambda \cos(\lambda x) - B\lambda \sin(\lambda x)$.

In die RB's eingesetzt, ergibt das

$$X(-\ell) = -A \sin(\lambda \ell) + B \cos(\lambda \ell) \overset{!}{=} A \sin(\lambda \ell) + B \cos(\lambda \ell) = X(\ell)$$

$$X'(-\ell) = A\lambda \cos(\lambda \ell) + B\lambda \sin(\lambda \ell) \overset{!}{=} A\lambda \cos(\lambda \ell) - B\lambda \sin(\lambda \ell) = X'(\ell)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad A = 0 \text{ oder } \sin(\lambda \ell) = 0 \\ \text{und } B = 0 \text{ oder } \sin(\lambda \ell) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{\pi k}{\ell}, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Also erfüllt jede Funktion der Form

$$u(x,t) = e^{-\frac{\pi^2 k^2}{\ell^2}\mu t} \left(A_k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) + B_k \cos\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right)\right)$$

die DGL und die RB's.

Superposition ergibt

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 k^2}{\ell^2}\mu t} \left(A_k \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) + B_k \cos\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right)\right).$$

Die Anfangsbedingung führt zu

$$u(x,0) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} \cdot x\right) + B_k \cos\left(\frac{\pi k}{\ell} \cdot x\right) \overset{!}{=} u_0(x)$$

Folglich finden wir A_k, B_k via Fourierreihe über

$$A_k \; \cancel{B_0} = \frac{2}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} u_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) dx$$

$$B_k = \frac{2}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} u_0(x) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) dx$$

$$B_0 = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} u_0(x)\, dx$$