Tutoriumsaufgaben zur Differentialgleichungen I
3. Tutorium

Aufgabe 1
Seien X, Y und Z Banachräume, $S \in L(X,Y)$ und $T \in L(Y,Z)$. Zeige: Dann ist $TS \in L(X,Z)$ und es gilt die Ungleichung

$$\|TS\| \leq \|S\|\|T\|.$$

Zeige weiterhin, dass im Allgemeinen ' $\leq$ ' nicht durch ' $=$ ' ersetzt werden kann.

Aufgabe 2

siehe Rückseite

Aufgabe 3
Sei $X = C^1([0,1])$ mit der Norm $\|u\|_{C^1} = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ und sei $Y = \mathbb{R}$, versehen mit der Standardtnorm $|\cdot|$. Zeige, dass

$$T : X \to Y, \quad u \mapsto Tu := u(0) + u'(1)$$

linear und stetig ist und dass $\|T\| = 1$ gilt.

Aufgabe 4
Sei X ein Banachraum, $D \subset \mathbb{R} \times X$ offen und $f : D \to X$ stetig. Zeige, dass das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \quad \text{mit } (t_0, u_0) \in D \end{cases}$$

lokal eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, falls f einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt.

3 Fragen:

1) Wie lautet die Definition von $L(X,Y)$ und deren Norm?

2) Was besagt die Lipschitz-Bedingung?

3) Wie lautet der Satz von Picard-Lindelöf?

---

1) $L(X,Y) = \{ A : X \to Y \text{ linear u. beschr.} \}$

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

2) $f : [0,T] \times X \to X$

L-Bed. auf $\bar{B}_r(u_0)$: $\exists L \geq 0 \ \forall t \in [0,T], v,w \in \bar{B}_r(u_0)$:

$$\|f(t,v) - f(t,w)\| \leq L \|v-w\|$$

L-Bed auf X: analog

$f : \mathbb{R} \times X \to X$

lokale L-Bed ~~auf~~ $\cancel{\bar{B}_r(u_0)}$: $\forall (t,v) \in \mathbb{R} \times X \quad \exists a, r \geq 0, L(t,v) \geq 0$:

$\forall s \in \mathbb{R}, w_1, w_2 \in X$ mit $|s-t| \leq a$, $w_1, w_2 \in \bar{B}_r(v)$

$$\|f(s,w_1) - f(s,w_2)\| \leq L \|w_1 - w_2\|$$

P-L lokal:

3) Sei $f: [0,T] \times \overline{B}(u_0, r) \to X$ stetig, genüge der L-Bed für ein $T > 0$.

Dann hat $\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ auf $I = [0,T] \cap [t_0 - a, t_0 + a]$, $a = \min\{\frac{r}{M}, \frac{1}{2L}\}$

genau eine Lösung $u: I \to \overline{B}_r(u_0) \in C^1(I, X)$.

P-L global: L-Bed auf X $\Rightarrow \exists! u \in C^1([0,T]; X)$.

P-L global bei lok L-Bed:

$+ \ \exists M > 0: \|f(t, u(t))\| \leq M \ \forall t$

$\Rightarrow \forall u_0 \in X, t_0 \in \mathbb{R} \ \exists! \ u \in C^1(\mathbb{R}, X)$

1) $x, y \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$(TS)(\lambda x + \mu y) = T(S(\lambda x + \mu y)) = T(\lambda Sx + \mu Sy)$$

$$= \lambda T(Sx) + \mu T(Sy) = \lambda (TS)x + \mu (TS)y$$

und $x \in X \Rightarrow Sx \in Y \Rightarrow T(Sx) \in Z$.

Sei $0 \neq x$, dann

$$\|(TS)(x)\|_Z = \|T(Sx)\|_Z \leq \|T\| \, \|Sx\|_Y \leq \|T\| \, \|S\| \, \|x\|_X$$

$\Rightarrow$ TS beschränkt und $\|TS\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|(TS)(x)\|_Z}{\|x\|_X} \leq \|T\| \, \|S\|$

Gegenbeispiel, dass "=" nicht i.A. gilt:

Sei $X = Y = Z = \mathbb{R}^2$ und $S(x_1, x_2) = (x_1, 0)$, $T(y_1, y_2) = (0, y_2)$.

$\Rightarrow$ $(TS)(x_1, x_2) = T(x_1, 0) = (0, 0)$ $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ $\|TS\| = 0$, aber $\|T\|, \|S\| \neq 0$

3) Linearität ist klar. Sei $u \in X$, dann folgt

$$|Tu| = |u(0) + u'(1)| \leq |u(0)| + |u'(1)| \leq \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty = \|u\|_{C^1}$$

$\Rightarrow$ T ist beschränkt (also stetig) und $\|T\| \leq 1$

Sei nun $\tilde{u} \in C^1$, $\tilde{u} \equiv 1$ ($\Rightarrow \|\hat{u}\|_{C^1} = 1$).

Dann ist $|T\tilde{u}| = 1$,

$$\Rightarrow \|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{|Tu|}{\|u\|_{C^1}} \geq \frac{|T\hat{u}|}{\|\hat{u}\|_{C^1}} = 1$$

Also gilt $\|T\| = 1$.

2)

Löse $u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(t) = f(t, u(t))$, $u_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es ist also:

- $u_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} ds$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}$

- $u_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -1 \\ -s \end{pmatrix} ds$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ -t^2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 - t^2/2 \end{pmatrix}$

- $u_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^2 - 1 \\ -s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2 \cdot 3} t^3 - t \\ -\frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2 \cdot 3} t^3 - t \\ 1 - \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$

- $u_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^2 - 1 \\ \frac{1}{6}s^3 - s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6}t^3 - t \\ \frac{1}{6 \cdot 4} t^4 - \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}t^3 - t \\ \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 1 \end{pmatrix}$

Wir erkennen das System und schließen daraus:

Die erste Komponente geht gegen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^{k+1} t^{2k+1} = -\sin(t)$,

die zweite gegen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k t^{2k} = \cos(t)$.

Probe: $u(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow u'(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$

und $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ ✓

2) $u'(t) = \begin{pmatrix} u_1(t)\, u_2(t) \\ 2 \\ -u_2(t)\, u_3(t) \end{pmatrix}, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $u^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}$

- $u^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2s \\ 2 \\ -2s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ -t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ 2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix}$

- $u^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2s+2s^3 \\ 2 \\ -2s+2s^3 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2+\frac{1}{2}t^4 \\ 2t \\ -t^2+\frac{1}{2}t^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t^2+\frac{1}{2}t^4 \\ 2t \\ 1-t^2+\frac{1}{2}t^4 \end{pmatrix}$

- $u^{(4)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2s+2s^3+s^5 \\ 2 \\ -2s+2s^3-s^5 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2+\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{6}t^6 \\ 2t \\ -t^2+\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{6}t^6 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+t^2+\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{6}t^6 \\ 2t \\ 1-t^2+\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{6}t^6 \end{pmatrix}$$

...

$\Rightarrow \quad u_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t^2)^k = e^{t^2}$

$u_2(t) = 2t$

$u_3(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^k (t^2)^k = e^{-t^2}$

Probe:

$$u'(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 2t \\ e^{-t^2} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2t\,e^{t^2} \\ 2 \\ -2t\,e^{t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(t)\, u_1(t) \\ 2 \\ -u_2(t)\, u_3(t) \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

4)

Da D offen gilt für (t_0, u_0):

$\exists\, a>0,\ r>0,\ L\geq 0: \ \forall (\overset{s}{\cancel{t}}, v), (s,w) \in D$ mit $|s-t_0| < a$

und $\|v-u_0\| < r$

$\|w-u_0\| < r$

gilt $\|f(s,v) - f(s,w)\| \leq L \|v-w\|$.

Setze nun $[\tilde{a}, \tilde{b}] := [t_0 - \frac{a}{2}, t_0 + \frac{a}{2}]$ und $\tilde{r} := \frac{r}{2}$.

(inklusive eventuelle Verschiebung von $\tilde{a}$ nach 0)

Jetzt können wir das Problem mit $f: [\tilde{a}, \tilde{b}] \times \overline{B}(u_0, \tilde{r}) \to X$ betrachten. Hier genügt f der Lipschitz-Bedingung, sodass mit Picard-Lindelöf die Behauptung folgt.