Tutoriumsaufgaben zur Differentialgleichungen I
4. Tutorium

Aufgabe 1

siehe Rückseite

Aufgabe 2
Ein Vektorfeld $F \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ heißt *Kraftfeld*, falls der Vektor $F(x)$ eine Kraft darstellt, die auf eine im Punkt x befindliche Masse m wirkt. Die Bahnkurve eines Teilchens mit der Masse m wird dann beschrieben durch das System $m\ddot{x} = F(x)$.
Ein Kraftfeld heißt *konservativ*, falls es ein Feld $V \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ gibt mit $F(x) = -\nabla V(x)$ (V heißt dann *Potential* von F).
Ein Kraftfeld heißt *zentral*, falls es ein Feld $\lambda \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ gibt mit $F(x) = \lambda(x)x$ in $\mathbb{R}^3$.

(i) Sei $x(t)$ die Bahnkurve eines Teilchens mit Masse m in einem konservativen Kraftfeld. Zeige, daß die Gesamtenergie $E(t) = E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + V(x(t))$ während der Bewegung erhalten bleibt, also $E(t) \equiv const.$ gilt.

(ii) Zeige, daß die Bahnkurven $x(t)$ in einem zentralen Kraftfeld ebene Kurven sind (Betrachte $x(t) \times \dot{x}(t)$).

Aufgabe 3
Bestimme den Propagator der Differentialgleichung

$$u'(t) + \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t-1 & -1 \end{pmatrix} u(t) = 0, \quad t > 0.$$

2 Fragen:

1) Wie ist der Propagator definiert?

2) Nenne 3 der 7 Eigenschaften.

---

1) Sei $A \in C(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X))$. Die durch die eindeutig bestimmten Lösungen $u = u(t)$ des homogenen AWPs

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)\,u(t) = 0 & , t \in \mathbb{R} \\ u(s) = 0 & \end{cases}$$

erzeugte Abbildung $U(t,s): X \to X$, $U(t,s)u_0 := u(t)$ heißt Propagator.

2) Sei $A \in C(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X))$. Dann hat die zweiparametrige Familie $\{U(t,s)\}_{t,s \in \mathbb{R}}$ die folgenden Eigenschaften:

i) $U(t,s) \in L(X)$ $\forall t,s$, $(t,s) \mapsto U(t,s)$ stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

ii) $U(t,t) = id$

iii) $U(t,r)\,U(r,s) = U(t,s)$ und $U(t,s) = U(s,t)^{-1}$ $\forall r,s,t \in \mathbb{R}$

iv) $(t,s) \mapsto U(t,s)$ ist Lsg von $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U(t,s) + A(t)\,U(t,s) = 0 \\ U(s,s) = 0 \end{cases}$ in $L(X)$

v) Ist $A(t) \equiv A$, so gilt $U(t,s) = U(t-s,0) =: S(t-s)$

vi) $\frac{\partial}{\partial t} U(t,s) = -A(t)\,U(t,s)$, $\frac{\partial}{\partial s} U(t,s) = U(t,s)\,A(s)$

vii) $\|U(t,s)\|_{L(X)} \leq \exp\left(\int_s^t \|A(\tau)\|_{L(X)}\, d\tau \right)$ $\forall t > s$

Aufgabe 1

Nach dem Ansatz des Verfahrens gilt

$$v(t) = \phi(t)\,u(t) + z(t) = \phi(t)\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\z_2(t)\end{pmatrix}$$

Dann gilt $v'(t) = \phi'(t)\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\z_2'(t)\end{pmatrix}$.

Einsetzen in DGL gibt

$$\phi'(t)\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\z_2'(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-t^2 & 3t^2\\ -t^2/3 & t^2\end{pmatrix}\left(\phi(t)\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\z_2(t)\end{pmatrix}\right)$$

$$= \phi'(t)\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\z_2'(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3t^2 z_2(t)\\ t^2 z_2(t)\end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Also folgt $\quad 3\phi'(t) = -3t^2 z_2(t) \qquad (1)$

und $\quad \phi'(t) + z_2'(t) + t^2 z_2(t) = 0. \qquad (2)$

$(1) \Rightarrow \phi'(t) = -t^2 z_2(t)$

in $(2) \Rightarrow z_2'(t) = 0 \quad \Rightarrow$ wähle $z_2(t) \equiv 1$

$\Rightarrow \phi(t) = -\frac{1}{3}t^3$

Also ist eine zweite Lösung

$$v(t) = -\frac{1}{3}t^3\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

$v'(t) = -t^2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow -t^2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-t^2 & 3t^2\\ -t^2/3 & t^2\end{pmatrix}\left(-1/3\, t^3\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

$=$

Aufgabe 2

i) $\frac{d}{dt} E(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + V(x(t))\right)$

$$= m\, \ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t) + \nabla V(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$$

$$= m\, \ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t) - m\, \ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t) = 0$$

$\Rightarrow E(t)$ const.

ii) Wir betrachten

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) \times \dot{x}(t) \right) = \underbrace{\dot{x}(t) \times \dot{x}(t)}_{=0} + x(t) \times \ddot{x}(t)$$

wegen $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$
also $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

$\vec{a} \times \vec{b}$ bilinear

$$= \frac{1}{m}\, x(t) \times F(x(t))$$

$$= \frac{1}{m}\, x(t) \times \left(\lambda(x(t)) \cdot x(t) \right)$$

$$= \frac{\lambda(x(t))}{m}\, x(t) \times x(t) = 0$$

$\Rightarrow \quad (x(t) \times \dot{x}(t)) = \text{const} \quad \forall t \qquad (*)$

Da $x(t) \times \dot{x}(t)$ senkrecht auf der durch $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ aufgespannten Ebene $\forall t$ ~~liegt~~ steht, folgt mit $(*)$, dass die durch $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ aufgespannte Ebene ebenfalls konstant sein muss.
In dieser Ebene verläuft die Bahnkurve.

Aufgabe 3

Da $\mathcal{U}(t,s): X \to X$ und $X = \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ $\mathcal{U}(t,s)$ ist 2×2-Matrix

Mit $u(t) = \mathcal{U}(t,s)u_0$ bekommen wir für $u_0 = \binom{1}{0}$ und $u_0 = \binom{0}{1}$

die Spalten von $\mathcal{U}(t,s)$ als Lösungen von $\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = 0 \\ u(s) = u_0 \end{cases}$.

(oder äquivalent: löse $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t,s) + A(t)\mathcal{U}(t,s) = 0 \\ \mathcal{U}(s,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$).

Sei nun $u(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$. Dann folgt

$$\begin{cases} v'(t) + v(t) - \frac{1}{t} w(t) = 0 & (1) \\ w'(t) + (t-1)v(t) - w(t) = 0 & (2) \end{cases}$$

Aus (1) folgt $w = tv' + tv$, also $w' = tv'' + v' + tv' + v$

in (2) eingesetzt ergibt das

$$tv'' + v' + tv' + v + (t-1)v - tv' - tv = 0$$

$$\Rightarrow \quad tv'' + v' = 0 \qquad (3)$$

Wir finden 2 l.u. Lösungen für (3):

1. $v_1(t) \equiv c \in \mathbb{R}$

2. Subst. $z = v'$, löse $tz' + z = 0$ $\Rightarrow$ $z' = \frac{1}{t} z$

$\Rightarrow z(t) = d\, e^{-\int_{t_0}^{t} 1/\tau \, d\tau} = d\, e^{-\ln t + \ln t_0} = \tilde{d}\, e^{\ln t^{-1}} = \frac{\tilde{d}}{t}$, $d, \tilde{d} \in \mathbb{R}$, $t_0 > 1$

$\Rightarrow v_2(t) = \tilde{d} \ln t$

Damit können wir die Lösungen w ~~bestimmen~~ über (1) bestimmen:

$w_1(t) = tc$, $w_2(t) = \tilde{d} + \tilde{d}\, t \ln t$

Also folgt zusammen:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = c + \tilde{d} \ln t$$

$$w(t) = w_1(t) + w_2(t) = tc + \tilde{d}(1 + t \ln t).$$

Mit $u_0 = \binom{1}{0}$ folgt für die erste Spalte von $\mathcal{U}(t,s)$:

$$1 = v(s) = c + \tilde{d} \ln s \qquad \Rightarrow c = 1 - \tilde{d} \ln s$$

$$0 = w(s) = sc + \tilde{d}(1 + s \ln s) \qquad \Rightarrow s(1 - \tilde{d} \ln s) + \tilde{d}(1 + s \ln s) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{d} = -s \qquad \Rightarrow c = 1 - s \ln s$$

Mit $u_0 = \binom{0}{1}$ folgt für die zweite Spalte von $\mathcal{U}(t,s)$

$$0 = v(s) = c + \tilde{d} \ln s$$

$$1 = w(s) = sc + \tilde{d}(1 + s \ln s) \qquad \Rightarrow \dots \quad \tilde{d} = 1, \; c = -\ln s,$$

sodass insgesamt gilt:

$$\mathcal{U}(t,s) = \left(\mathcal{U}(t,s)\binom{1}{0}, \; \mathcal{U}(t,s)\binom{0}{1} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + s \ln s - s \ln t & -\ln s + \ln t \\ (1 + s \ln s)t - s(1 + t \ln t) & -t \ln s + 1 + t \ln t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \ln \frac{s}{t} & \ln \frac{t}{s} \\ t - s + ts \ln \frac{s}{t} & 1 + t \ln \frac{t}{s} \end{pmatrix}$$