

## Inhaltsverzeichnis und Prüfungsthemen zur Vorlesung

### **Differentialgleichungen I**

im Wintersemester 2011/2012

#### **Inhaltsverzeichnis**

0. Einführung: Anwendungsbeispiele und Typen von Differentialgleichungen
1. Elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen
  - 1.1. Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen
  - 1.2. Nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen
  - 1.3. Charakteristikenverfahren für quasilineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung
  - 1.4. Grundtypen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung
2. Existenz und Einzigkeit bei Anfangswertproblemen für gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen
  - 2.1. Integral für stetige Funktionen einer reellen Veränderlichen mit Werten in einem Banach-Raum
  - 2.2. Der Satz von Picard-Lindelöf: Lokale und globale eindeutige Lösbarkeit von Anfangswertproblemen für gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen
  - 2.3. Lineare Systeme mit beschränkten Operatoren
  - 2.4. Der Satz von Peano über die lokale Lösbarkeit von Anfangswertproblemen für endlichdimensionale Systeme und eine Verallgemeinerung auf Operator-Differentialgleichungen
  - 2.5. Einzigkeitsaussagen
  - 2.6. Verlauf der Lösungen im Großen und maximal fortgesetzte Lösungen
  - 2.7. Existenz und Einzigkeit von Lösungen im Sinne von Carathéodory
3. Abhängigkeit der Lösungen von den Daten, Stabilität, Zeitdiskretisierung
  - 3.1. Stetige und differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen von den Daten. Das Gronwall'sche Lemma
  - 3.2. Dissipative Systeme
  - 3.3. Zeitdiskretisierung durch einfache Einschrittverfahren
  - 3.4. Stabilität und der Satz von Ljapunov. Asymptotisches Verhalten

4. Klassische Lösbarkeit von Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung
  - 4.1. Grundbegriffe und elementare Aussagen
  - 4.2. Randwertprobleme für homogene, lineare Differentialgleichungen
  - 4.3. Greensche Funktion und semilineare Probleme I
  - 4.4. Greensche Funktion und inhomogene, lineare Probleme
  - 4.5. Sturm-Liouville-Problem
  - 4.6. Maximumprinzip und Stabilität
  - 4.7. Greensche Funktion und semilineare Probleme II
  - 4.8. Ober- und Unterlösungen und die Bedingung von Nagumo

## Prüfungsthemen

### 0. Einführung: Anwendungsbeispiele und Typen von Differentialgleichungen

Anwendungsgebiete; verschiedene Typen von Differentialgleichungsproblemen; linear, nicht-linear (semilinear, quasilinear); verschiedene Typen von Anfangs- und Randbedingungen; die großen Fragen in der Theorie der Differentialgleichungen

### 1. Elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen

Superpositionsprinzip, Fundamentalsystem, Wronski-Determinante, Variation der Konstanten, Trennung der Veränderlichen, Ansatz der rechten Seite und andere Lösungsmethoden für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen; elliptische, hyperbolische, parabolische Gleichungen; Separations- bzw. Produktansatz; Charakteristikenverfahren

### 2. Existenz und Einzigkeit bei Anfangswertproblemen für gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen

Integral für stetige Funktionen mit Werten in einem Banach-Raum, insbesondere Konstruktion und Eigenschaften; Nemyzki-Operator und dessen Eigenschaften; Rieszscher Kompaktheitssatz (ohne Beweis); Banachscher Fixpunktsatz (mit Beweis);

lokale und globale Lösbarkeit nach Picard-Lindelöf (im beliebigen Banach-Raum, mit Beweis); lineare Systeme mit (zeitabhängigem) beschränktem Operator, insbesondere Konstruktion und Eigenschaften des Propagators (Evolutionsooperators) und im autonomen Fall der einparametrischen Gruppe, Prinzip von Duhamel, endlichdimensionale Systeme (mit Beweisen);

(lineare und nichtlineare) kompakte Operatoren; Brouwerscher Fixpunktsatz (ohne Beweis); Schauderscher Fixpunktsatz (mit Beweis); Satz von Arzelà-Ascoli und dessen Verallgemeinerung (ohne Beweis); lokale Lösbarkeit nach Peano (in  $\mathbb{R}^d$  und Verallgemeinerung auf beliebigen Banach-Raum bei kompakter rechter Seite, mit Beweis);

Einzigkeitsaussagen, insbesondere lokale und einseitige Lipschitz-Bedingung (mit Beweis) sowie Nagumo- und Osgood-Bedingung (ohne Beweis);

maximal fortgesetzte Lösungen und Verlauf der Lösungen im Großen bzw. Randverhalten (nur Beweisideen);

Lösbarkeit im Sinne von Carathéodory (mit Beweis)

### 3. Abhängigkeit der Lösungen von den Daten, Stabilität, Zeitdiskretisierung

Lemma von Gronwall (mit Beweis); A-priori-Abschätzungen und stetige Abhängigkeit von der Anfangsbedingung und der rechten Seite (mit Beweis); Aussagen für dissipative Systeme (mit Beweis);

einfache Zeitdiskretisierung, insbesondere Abschätzungen für diskrete Lösung und Fehler des expliziten und impliziten Euler-Verfahrens (im beliebigen Banach-Raum, mit Beweis);

Gleichgewichtspunkte, stabil, attraktiv, asymptotisch stabil, exponentiell stabil; Stabilität linearer Systeme, Satz von Ljapunov und Satz über linearisierte Stabilität (jeweils nur Beweisidee)

4. Klassische Lösbarkeit von Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Lösbarkeit der linearen homogenen Aufgabe (mit Beweis), einschließlich Transformation in symmetrisches Problem; Lösbarkeit der linearen inhomogenen Aufgabe;

Lösbarkeit der semilinearen Aufgabe (rechte Seite sowohl  $f(\cdot, u)$  als auch  $f(\cdot, u, u')$ , mit Beweis über Greensche Funktion und Banachschem Fixpunktsatz); Satz von Scorza Dragoni (mit Beweis über Schauderschen Fixpunktsatz)

Maximumprinzip (auch starkes, mit Beweis) und stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten (mit Beweis);

Lösbarkeit des Sturm-Liouville-Problems (nur Beweisidee); Fredholmsche Alternative