Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Etienne Emmrich
Dr. Hans-Christian Kreusler

15. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis und Prüfungsthemen zur Vorlesung

Differentialgleichungen I

im Wintersemester 2011/2012

Inhaltsverzeichnis

Prüfungsthemen

0. Einführung: Anwendungsbeispiele und Typen von Differentialgleichungen

   Anwendungsgebiete; verschiedene Typen von Differentialgleichungsproblemen; linear, nichtlinear (semilinear, quasilinear); verschiedene Typen von Anfangs- und Randbedingungen; die großen Fragen in der Theorie der Differentialgleichungen

1. Elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen

   Superpositionsprinzip, Fundamentalsystem, Wronski-Determinante, Variation der Konstanten, Trennung der Veränderlichen, Ansatz der rechten Seite und andere Lösungsmethoden für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen; elliptische, hyperbolische, parabolische Gleichungen; Separations- bzw. Produktansatz; Charakteristikenverfahren

2. Existenz und Einzigkeit bei Anfangswertproblemen für gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen

   Integral für stetige Funktionen mit Werten in einem Banach-Raum, insbesondere Konstruktion und Eigenschaften; Nemyzki-Operator und dessen Eigenschaften; Rieszscher Kompaktheitssatz (ohne Beweis); Banachscher Fixpunktsatz (mit Beweis);
   lokale und globale Lösbarkeit nach Picard-Lindelöf (im beliebigen Banach-Raum, mit Beweis); lineare Systeme mit (zeitabhängigem) beschränktem Operator, insbesondere Konstruktion und Eigenschaften des Propagators (Evolutionsoperators) und im autonomen Fall der einparametrigen Gruppe, Prinzip von Duhamel, endlichdimensionale Systeme (mit Beweisen);
   (lineare und nichtlineare) kompakte Operatoren; Brouwerscher Fixpunktsatz (ohne Beweis); Schauderscher Fixpunktsatz (mit Beweis); Satz von Arzelà-Ascoli und dessen Verallgemeinerung (ohne Beweis); lokale Lösbarkeit nach Peano (in $\mathbb{R}^d$ und Verallgemeinerung auf beliebigen Banach-Raum bei kompakter rechter Seite, mit Beweis);
   Einzigkeitsaussagen, insbesondere lokale und einseitige Lipschitz-Bedingung (mit Beweis) sowie Nagumo- und Osgood-Bedingung (ohne Beweis);
   maximal fortgesetzte Lösungen und Verlauf der Lösungen im Großen bzw. Randverhalten (nur Beweisideen);
   Lösbarkeit im Sinne von Carathéodory (mit Beweis)

3. Abhängigkeit der Lösungen von den Daten, Stabilität, Zeitdiskretisierung

   Lemma von Gronwall (mit Beweis); A-priori-Abschätzungen und stetige Abhängigkeit von der Anfangsbedingung und der rechten Seite (mit Beweis); Aussagen für dissipative Systeme (mit Beweis);
   einfache Zeitdiskretisierung, insbesondere Abschätzungen für diskrete Lösung und Fehler des expliziten und impliziten Euler-Verfahrens (im beliebigen Banach-Raum, mit Beweis);
   Gleichgewichtspunkte, stabil, attraktiv, asymptotisch stabil, exponentiell stabil; Stabilität linearer Systeme, Satz von Ljapunov und Satz über linearisierte Stabilität (jeweils nur Beweisidee)

4. Klassische Lösbarkeit von Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung

   Lösbarkeit der linearen homogenen Aufgabe (mit Beweis), einschließlich Transformation in symmetrisches Problem; Lösbarkeit der linearen inhomogenen Aufgabe;
   Lösbarkeit der semilinearen Aufgabe (rechte Seite sowohl $f(\cdot, u)$ als auch $f(\cdot, u, u')$, mit Beweis über Greensche Funktion und Banachschem Fixpunktsatz); Satz von Scorza Dragoni (mit Beweis über Schauderschen Fixpunktsatz)
   Maximumprinzip (auch starkes, mit Beweis) und stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten (mit Beweis);
   Lösbarkeit des Sturm-Liouville-Problems (nur Beweisidee); Fredholmsche Alternative