Technische Universität Berlin WS 2011
Fakultät II – Institut für Mathematik Ausgabe: 24. 11. 2011
Prof. Dr. Jochen Blath/Dr. Noemi Kurt Abgabe: 1. 12. 2011

5. Übung

Stochastische Modelle

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Sei ferner $h : E \to I$ eine surjektive Abbildung mit der Eigenschaft dass

$$h(i) = h(j) \Rightarrow \sum_{k\in h^{-1}(\{x\})} p_{ik} = \sum_{k\in h^{-1}(\{x\})} p_{jk} \text{ für alle } x \in I.$$

Sei die Matrix $Q = (q_{xy})_{x,y\in I}$ definiert durch

$$q_{xy} = \sum_{j\in h^{-1}(\{y\})} p_{ij} \text{ für ein beliebiges } i \text{ mit } h(i) = x.$$

(a) Zeigen Sie, dass Q eine stochastische Matrix ist, und dass der Prozess $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch $Y_n = h(X_n)$ eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix Q ist.

(b) Sei π eine invariante Verteilung für (X_n). Finden Sie eine invariante Verteilung für (Y_n).

Aufgabe 2 (Kartenmischen) **(4 Punkte)**
Ein Stapel mit N Karten soll nach dem folgenden Verfahren gemischt werden: Die jeweils oberste Karte wird abgehoben und an einer uniform gewählten Stelle in den Stapel geschoben. Modellieren Sie das Mischen der Karten als eine Markov-Kette durch Angabe des Zustandsraums und der Übergangsmatrix. Zeigen Sie, dass diese Markov-Kette irreduzibel und aperiodisch ist, und bestimmen Sie die invariante Verteilung.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $\{1, .., N\}$ und Übergangsmatrix $P = (p_{ij})$, wobei $p_{ij} = 0$ für $|i - j| \geq 2$ und $p_{i,i+1} > 0$ für $i \in \{1, ..., N - 1\}$ gelten sollen. Weiter seien $P_{00} = p_{NN} = 1$. Definiere $\tau_i := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = i\}$. Sei nun $u_i := \mathbb{P}_i\{\tau_N < \tau_0\}$, d.h. u_i ist die Wahrscheinlichkeit, in N (und nicht in 0) absorbiert zu werden. Zeigen Sie

(a) $(u_i)_{i\in E}$ ist ein rechtsseitiger Eigenvektor von P mit Eigenwert 1.

(b) Mit $\rho_j := \prod_{k=1}^{j} \frac{p_{k,k-1}}{p_{k,k+1}}$ für $j \in E \setminus \{0, N\}, \rho_0 = 1, \rho_N = 0$ folgt

$$u_i = \frac{\sum_{j=0}^{i-1} \rho_j}{\sum_{j=0}^{N} \rho_j} \text{ für alle } j \in E.$$

(c) Die einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit Start in 0 besucht N mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{N+1}$ vor dem ersten Besuch in $-\mathbb{N}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (Galton-Watson-Prozess) **(4 Punkte)**

Die Namensgeber Galton und Watson interessierten sich für den Erhalt von Familiennamen. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass jede Familie genau 3 Kinder hat, von denen jedes mit Wahrscheinlichkeit $q \in (0,1)$ männlich ist. Im 19. Jahrhundert wurde der Familienname nur von männlichen Kindern weitergegeben. Wir starten mit einem männlichen Individuum zur Zeit $n = 0$. Geben Sie die Nachkommensvertelilung für den Galton-Watson-Prozess an, der die Anzahl Individuen mit dem betreffenden Familiennamen modelliert. Berechnen Sie für $q = 1/2$ die Wahrscheinlichkeit dass der Familienname ausstirbt.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte

Zur Erinnerung: Geben Sie bitte auch an, welche der Aufgaben Sie gegebenenfalls vorrechnen könnten!