Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Blath/Dr. Noemi Kurt

WS 2011
Ausgabe: 1. 12. 2011
Abgabe: 8. 12. 2011

6. Übung

Stochastische Modelle

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Wir betrachten die einfache symmetrische Irrfahrt auf $\{0, ..., N\}$ mit absorbierenden Rändern, das bedeutet, $p_{00} = p_{NN} = 1$, und $p_{i,i-1} = p_{i,i+1} = 1/2$ für $i \in \{1, ..., N-1\}$. Sei $\tau_0 := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = 0\}$ und $\tau_N := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = N\}$. Sei $\tau := \inf\{\tau_0, \tau_N\}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{P}_k(X_\tau = N) = \frac{k}{N}$. (Hinweis: Aufgabe 3 von Blatt 5 verwenden).

(b) $\mathbb{E}_k[\tau] = k(n-k)$. (Hinweis: Stellen Sie $\mathbb{E}_k[\tau]$ durch $\mathbb{E}_{k-1}[\tau]$ und $\mathbb{E}_{k+1}[\tau]$ dar und lösen Sie das entsprechende Gleichungssystem).

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Betrachte die Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \mathbb{N}_0$ und Übergangsmatrix P gegeben durch

$$p_{m,m+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m+2}\right) \quad \text{für } m \geq 0$$

$$p_{m,m-1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m+2}\right) \quad \text{für } m \geq 1,$$

und $p_{0,0} = 1 - p_{0,1} = 3/4$. Existiert für diese Kette eine reversible Wahrscheinlichkeitsverteilung?

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{0,1\}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{falls } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Dies ist die symmetrische Irrfahrt auf dem Hyperwürfel). Untersuchen Sie, ob diese Kette irreduzibel und aperiodisch ist, und entscheiden Sie, ob eine invariante Verteilung existiert. Falls ja, berechnen Sie diese Verteilung.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Wir betrachten $m \in \mathbb{N}$ nummerierte Kugeln, die auf zwei Urnen verteilt sind. In jedem Schritt wählen wir eine Kugel uniform und unabhängig aus den m Kugeln aus, und legen sie in die jeweils andere Urne. Sei (Y_n) die Anzahl Kugeln in der ersten Urne zur Zeit $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Geben Sie die Übergangsmatrix P der Markov-Kette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an.

(b) Wir wollen diesen Prozess mit der Irrfahrt auf dem Hyperwürfel vergleichen. Finden Sie dazu eine Abbildung $h : \{0,1\}^m \to \{0,1,...,m\}$ so dass $h((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ die gleiche Verteilung wie $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ hat, wobei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Markov-Kette aus Aufgabe 3 sein soll. Verwenden Sie das, um eine invariante Verteilung von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zu finden (Hinweis: Aufgabe 1 von Blatt 5).

(c) Ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reversibel?

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte

Zur Erinnerung: Geben Sie bitte auch an, welche der Aufgaben Sie gegebenenfalls vorrechnen könnten!