Technische Universität Berlin WS 2011
Fakultät II – Institut für Mathematik Ausgabe: 8. 12. 2011
Prof. Dr. Jochen Blath/Dr. Noemi Kurt Abgabe: 15. 12. 2011

7. Übung

Stochastische Modelle

Aufgabe 1 (Metropolis-Algorithmus) **(4 Punkte)**
Sei π eine Verteilung auf E und Q eine vorgegebene Übergangsmatrix auf E. Wie in der Übungsstunde definieren wir P durch

$$p_{ij} = \begin{cases} q_{ij} \min\{1, \frac{\pi(j)q_{ji}}{\pi(i)q_{ij}}\} & \text{falls } i \neq j, q_{ij} > 0 \\ 0 & \text{falls } i \neq j, q_{ij} = 0 \\ 1 - \sum_{k \neq i} p_{ik} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie dass P eine stochastische Matrix und π eine invariante Verteilung für P ist.

(b) Falls Q irreduzibel und π nicht die Gleichverteilung ist, so ist P irreduzibel und aperiodisch.

Aufgabe 2 (Verwerfungsmethode) **(4 Punkte)**
Es sei Q eine beliebige Verteilung, und B ein Ereignis mit $Q(B) > 0$. Wir wollen eine Zufallsgröße generieren, deren Verteilung die bedingte Verteilung $Q(\cdot|B)$ ist. Seien dazu unabhängige Zufallsgrößen $Z_1, Z_2 ...$ gegeben, die alle die Verteilung Q haben, also $P(Z_i \in A) = Q(A)$ für alle Ereignisse A. Sei

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : Z_n \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass Z_τ die gewünschte bedingte Verteilung besitzt.

Aufgabe 3 (Frisches Ziehen) **(4 Punkte)**
Zeigen Sie, dass es für den Propp-Wilson Algorithmus wichtig ist, für alle betrachteten Ketten ab dem Zeitpunkt $-N_k$ dieselben Realisierungen $U_{-N_k}, ..., U_{-1}$ zu benutzen. Wenn wir für jede Kettenfamilie, die zum Zeitpunkt $-N_k$ gestartet wird, "neu gezogene" Realisierungen der unabhängigen, gleichförmig auf $[0, 1]$ verteilten Zufallsvariablen U_n mit $n = -N_k, ..., -1$ benutzen (d.h. für $\{-N_{k-1}, .., -1\}$ nicht die Sprungentscheidungen der zum Zeitpunkt $-N_{k-1}$ gestarteten Ketten benutzen), so erhalten wir zum Verschmelzungszeitpunkt nicht die gewünschte Verteilung. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Sei $E = \{1, 2\}$ und

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi = (2/3, 1/3).$$

Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{P}(Y = 1) > \pi(1)$ ist, wenn Y der Zustand bei Verschmelzung bezeichnet. (Hinweis: Wählen Sie $N_k = 2^k$ und betrachten Sie den kleinsten Index $K \in \mathbb{N}$ so dass die zum Zeitpunkt $-N_K$ gestarteten Ketten zum Zeitpunkt 0 verschmelzen).

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (Verwerfungsmethode 2) **(4 Punkte)**

Seien π und ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer endlichen Menge E, und sei $c > 1$ derart dass $\pi(i) \leq c\nu(i)$ für alle $i \in E$ gilt. Wir betrachten folgenden Algorithmus:

1. Ziehe einen nach ν verteilten Wert $X \in E$.
2. Gegeben $X = i$, akzeptiere den Wert mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\pi(i)}{c\nu(i)}$ und terminiere, andernfalls verwerfe ihn und gehe zurück zu Schritt 1.

Beweisen Sie, dass dieser Algorithmus in endlicher Zeit terminiert und eine nach π verteilte Stichprobe generiert.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte

Zur Erinnerung: Geben Sie bitte auch an, welche der Aufgaben Sie gegebenenfalls vorrechnen könnten!