Technische Universität Berlin WS 2011
Fakultät II – Institut für Mathematik Ausgabe: 5. 1. 2012
Prof. Dr. Jochen Blath/Dr. Noemi Kurt Abgabe: 12. 1. 2012

9. Übung

Stochastische Modelle

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**
Es seien $\lambda, \mu > 0$ und $(X(t))_{t>0}$ sei eine Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{1, 2\}$ und $Q-$Matrix

$$Q = \begin{bmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{i,j}(t)$ für $i, j \in E$ und $t > 0$ unter Verwendung der Vorwärtsgleichung.

(b) Berechnen Sie

(a) $\mathbb{P}(X(t) = 2 \,|\, X(0) = 1, X(3t) = 1)$

(b) $\mathbb{P}(X(t) = 2 \,|\, X(0) = 1, X(3t) = 1, X(4t) = 1)$.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**
Sei $(X(t))_t$ sei eine Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$ und $Q-$Matrix

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Finden Sie eine Markov-Kette in diskreter Zeit $(\hat{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und einen unabhängigen Poisson-Prozess $(N(t))_{t\geq 0}$, so dass $(X(t))_{t>0}$ und $(\hat{X}(N(t)))_{t>0}$ die gleiche Verteilung haben.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**
Der Yule-Prozess ist ein Markov-Prozess in stetiger Zeit auf $\mathbb{N}_0$, der die Größe einer Bakterienkultur modelliert unter der Annahme, dass sich Bakterien mit Rate $\lambda > 0$ unabhängig voneinander in zwei Bakterien teilen. Mit $(X_t)_{t\geq 0}$ bezeichnen wir die Anzahl der Bakterien zur Zeit t.
Bestimme Sie mit Hilfe von kombinatorischen Argumenten die Halbgruppe $P(t)$ von $(X_t)_{t\geq 0}$.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**
Beweisen Sie, dass die Markov-Kette aus Aufgabe 1 eine invariante Verteilung besitzt, und berechnen Sie diese.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte