Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Blath/Dr. Noemi Kurt

WS 2011
Ausgabe: 12. 1. 2012
Abgabe: 19. 1. 2012

10. Übung

Stochastische Modelle

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**
Betrachte die Markov-Kette $(X_t)_{t>0}$ mit $Q-$Matrix

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie

(a) die zugehörige Halbgruppe $(P(t))_{t>0}$,

(b) die invariante Verteilung π direkt aus Q.

Zeigen Sie im Weiteren explizit dass $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \pi(j)$ gilt.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**
Betrachte den Geburts-Todes-Prozess $(X_t)_{t>0}$ mit Geburtsraten $\lambda_n := n\lambda$ und Todesraten $\mu_n := n\mu$ für $n \in \mathbb{N}_0$, und feste $\lambda, \mu > 0$. Definiere

$$\eta(t) := \mathbb{P}(X(t) = 0 | X(0) = 1).$$

(a) Zeigen Sie dass für alle $t > 0$ gilt

$$\eta'(t) + (\lambda + \mu)\eta(t) = \mu + \lambda\eta(t)^2.$$

(b) Berechnen Sie $\eta(t), t > 0$

(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X(t) = 0 | X(u) = 0)$ für $0 < t < u$.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**
Betrachte die einfache symmetrische Irrfahrt in stetiger Zeit auf $\{0, ..., n\}$, d.h. die Markov-Kette gegeben durch folgende Sprungraten:

1. Für $i \in \{1, ..., n-1\}$ springt die Kette mit Rate 1 nach links und mit derselben Rate 1 nach rechts.

2. Die Rate für einen Sprung von 0 nach 1 wird mit λ, die Rate für einen Sprung von n nach $n-1$ mit μ bezeichnet.

Finden Sie alle invarianten Maße für sämtliche möglichen Werte von λ und μ.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Es sei $(X_t)_{t>0}$ eine Markov-Kette in stetiger Zeit auf abzählbarem Zustandsraum E. Für die $Q-$Matrix nehmen wir an, dass $\sum_{j\neq i, j\in E} q_{ij} = -q_{ii} \in (r, R)$ für alle $i \in E$ gilt, wobei $0 < r < R < \infty$ sein soll. Für $A \subset E$ definieren wir $H_A := \inf\{t \geq 0 : X(t) \in A\}$, $P_j = \mathbb{P}_j(H_A < \infty)$ und $E_j := \mathbb{E}_j[H_A]$. Zeigen Sie

(a) $\sum_{k\in E} q_{jk} P_k = 0$ für alle $j \notin A$,

(b) $(E_j)_{j\in E}$ ist die minimale nicht-negative Lösung von

$$E_j = 0 \text{ falls } j \in A, \quad 1 + \sum_{k\in E} q_{jk} E_k = 0 \text{ falls } j \notin A.$$

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte