

3. Übungsblatt „Versicherungsmathematik“

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe:

5 Punkte

Es wurde bewiesen, dass die Nettoeinmalprämie unter allen Nettoprämien die geringste Varianz hat, sofern die Abbildung $t \mapsto \frac{A(t)}{K(t)}$ fallend ist. Zeige, dass die Aussage ohne diese Annahme nicht mehr gelten muss.

2. Hausaufgabe:

5 Punkte

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\omega_1) = 1/3$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1/6$ und $\mathbb{P}(\omega_3) = \mathbb{P}(\omega_4) = 1/4$ sei. Definiere $\mathcal{G} = \sigma(\{\omega_1, \omega_2\})$ und $\mathcal{H} = \sigma(\{\omega_1\})$. Bestimme für die Zufallsvariable X gegeben durch $X(\omega_1) = 1$, $X(\omega_2) = 3$, $X(\omega_3) = -2$ und $X(\omega_4) = 0$ folgende Zufallsvariablen $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ und $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$.

3. Hausaufgabe:

5 Punkte

Bestimme das prospektive Deckungskapital mit Hilfe der Thielschen Differentialgleichung für den folgenden Fall. Wir betrachten eine reine Todesfallversicherung mit konstanter Auszahlung $a > 0$. Die Lebensdauer sei auf dem Intervall $[0, 100]$ gleichverteilt. Die Prämien werden stetig konstant mit Rate π eingezahlt ($\Pi(t) = \pi t$) und der Einfachheit halber sei $K(t) = 1$ konstant.

Bestimme nun zunächst π so, dass es sich um eine Nettoprämie handelt. Löse dann die Thielsche DGL und interpretiere die Lösung.

4. Hausaufgabe:

5 Punkte

Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine σ -Algebra und X eine Zufallsvariable mit endlichen zweiten Moment. Zeige, dass für alle \mathcal{G} -messbaren Zufallsvariablen Y mit $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$ gilt

$$\mathbb{E}((X - Y)^2) \geq \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}))^2)$$

und Gleichheit genau dann, wenn $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. Was bedeutet diese Aussage für die bedingte Erwartung?

Bemerkung: Die Hausaufgaben sind in Gruppen mit genau drei Studenten abzugeben!