Technische Universität Berlin **WS 2011/2012**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Dozent: Dr. Marcel Ortgiese
Assistent: Simon Wasserroth Abgabe: 08.12.2011

6. Übungsblatt „Versicherungsmathematik“

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ und N eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$, auch mit endlichem ersten Moment. Gilt auch ohne die Unabängigkeit weiter die Waldsche Gleichung $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^N X_i) = \mathbb{E}X_1\mathbb{E}N$? Reicht es für die Waldsche Gleichung, nur zu fordern, dass $\mathbf{1}_{N=n}, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ alle unabhängig sind für alle $n \in \mathbb{N}$?

2. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige und identisch Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $p \in (0,1)$. Man zeige, dass für $p \le x \le 1$ gilt

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i \ge nx) \le e^{-nI(x)}$$

mit

$$I(x) = x\log(x/p) + (1-x)\log((1-x)/(1-p)).$$

3. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Es sei die Verteilung von N aus der Panjer Klasse. Zeige, dass dann für alle $t \in [0,1)$ in dem kollektiven Risikomodell für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion folgendes gilt.

(i) $(1 - a\phi_{X_1}(t))\phi'_{S_{\text{koll}}}(t) = (a+b)\phi_{S_{\text{koll}}}(t)\phi'_{X_1}(t)$

(ii) $(1 - a\phi_{X_1}(t))\phi^{(n)}_{S_{\text{koll}}}(t) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(a + bk/n)\phi^{(n-k)}_{S_{\text{koll}}}(t)\phi^{(k)}_{X_1}(t)$

4. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Es sei die Verteilung von N aus der Panjer Klasse. In dem kollektiven Risikomodell habe die $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable X_1 alle Momente. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{E}\binom{S_{\text{koll}}}{n} = \frac{1}{1-a}\sum_{k=1}^n (a + bk/n)\mathbb{E}\binom{S_{\text{koll}}}{n-k}\mathbb{E}\binom{X_1}{k}$$

Bemerkung: Die Hausaufgaben sind in Gruppen mit genau drei Studenten abzugeben!