Technische Universität Berlin **WS 2011/2012**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Dozent: Dr. Marcel Ortgiese
Assistent: Simon Wasserroth Abgabe: 05.01.2012

8. Übungsblatt „Versicherungsmathematik“

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Es seien ein Poisson-Prozess $N(t)$ mit Intensität $\lambda > 0$, eine reellwertige, positive und von N unabhängige Zufallsvariable X sowie eine reelle, wachsende Funktion $f(t)$ mit $f(0) = 0$ gegeben. Der Prozess $G(t) := N(Xf(t))$ heißt gemischter Poisson-Prozess. Bestimme Erwartungswert und Varianz von $G(t)$ für $t > 0$.

2. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Es sei $L_t = A_t + R_t = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ die Gesamtlebensdauer zur Zeit t eines Erneuerungsprozesses $N(t)$, wobei F die Verteilung der unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen W_i ist. Ferner sei $\mu = \mathbb{E}W_1 < \infty$ und F nichtarithmetisch. Man zeige, dass für $x > 0$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(L_t \leq x) = 1/\mu \int_0^x y \mathrm{d}F(y).$$

3. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Es sei X eine nichtnegative Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeige mit Fubini

$$\mathbb{E}X = \int_{(0,\infty)} \mathbb{P}(X > t)dt$$

und allgemeiner für $p \geq 1$

$$\mathbb{E}X^p = \int_{(0,\infty)} pt^{p-1}\mathbb{P}(X > t)dt.$$

4. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Es sei $\mathbb{E}W_i = \mu < \infty$ der Erwartungswert der Wartezeiten eines Erneuerungsprozesses mit Erneuerungsfunktion M . Es habe außerdem die Wartezeit W_i endliches zweites Moment. Wir wissen, dass $\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = 1/\mu$. Zeige, dass für die Abweichung gilt $\lim_{t\to\infty} M(t) - t/\mu = \frac{1}{2\mu^2}\mathbb{E}W_1^2 - 1$. Hinweis: Nutze die 'restliche Lebensdauer'.

Frohe Weihnachten!
Bemerkung: Die Hausaufgaben sind in Gruppen mit genau drei Studenten abzugeben!