Technische Universität Berlin **WS 2011/2012**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Dozent: Prof. Dr. M. Scheutzow
Assistent: M. Wilke Berenguer

Ausgabe: Mi 25.01.2011
Abgabe: Mi 01.02.2011

13. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 2“
Schwache Konvergenz und Straffheit

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: **5 Punkte**

Seien $\alpha > 0$ und $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger auf dem Intervall $[0, \alpha]$ gleichverteilter Zufallsvariablen. Seien außerdem für $n \in \mathbb{N}$ $Y_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ sowie $Z_n := n(\alpha - Y_n)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(Z_n)$ für $n \to \infty$ schwach gegen eine Exponentialverteilung konvergiert und bestimmen Sie deren Parameter.

2. Hausaufgabe: **6 Punkte**

(i) Es seien (S, d) ein metrischer Raum und $A \subset S$. Zeigen Sie, dass $\{\delta_a : a \in A\}$ genau dann straff ist, wenn A relativ kompakt ist.

(ii) Es seien $f, f_n \in C([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $\delta_{f_n} \circ \pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_m} \xrightarrow{w} \delta_f \circ \pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le 1$ genau dann gilt, wenn f_n punktweise gegen f konvergiert.

3. Hausaufgabe: **9 Punkte**

Zu $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ bezeichne F_μ die Verteilungsfunktion von μ. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Durch $d(F_\mu, F_\nu) := \inf\{h > 0 : F_\mu(x-h) - h \le F_\nu(x) \le F_\mu(x+h) + h \forall x \in \mathbb{R}\}$ für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ wird eine Metrik auf der Menge der Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$ definiert.

(ii) Es gilt für $\mu, \mu_1, \ldots \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$:

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(F_\mu, F_{\mu_n}) = 0$$

4. Hausaufgabe: Zusatzaufgabe **4 Punkte**

(i) Man zeige oder widerlege: Sind die $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ Messräume und sind $\mathcal{D}_1$ bzw. $\mathcal{D}_2$ Erzeuger von $\mathcal{F}_1$ bzw. $\mathcal{F}_2$, dann ist

$$\mathcal{D} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{D}_1, B \in \mathcal{D}_2\}$$

ein Erzeuger von $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

(ii) Wie lautet die Antwort, wenn in i) zusätzlich vorausgesetzt wird, dass $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ durchschnittstabil sind?