Technische Universität Berlin **WS 2011/2012**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Dozent: Prof. Dr. M. Scheutzow
Assistent: M. Wilke Berenguer
Ausgabe: Mi 26.10.2011
Abgabe: Mi 02.11.2011

2. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 2“
Messbare Funktionen und Integration

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

1. Hausaufgabe: erzeugte σ-Algebren **4 Punkte**
Es seien $(\Omega, \mathcal{G})$ und $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{G}})$ zwei messbare Räume und $f : \Omega \to \tilde{\Omega}$ eine Abbildung. Sei weiterhin $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\tilde{\Omega})$ ein Erzeuger von $\tilde{\mathcal{G}}$. Dann erzeugt $f^{-1}(\mathcal{E})$ die σ-Algebra $f^{-1}(\tilde{\mathcal{G}})$, d.h.: Es gilt für jede Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\tilde{\Omega})$:

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})).$$

2. Hausaufgabe: Messbarkeitskriterium **4 Punkte**
Betrachten Sie zwei messbare Räume $(\Omega, \mathfrak{F})$ und $(\hat{\Omega}, \hat{\mathfrak{F}})$ und eine Abbildung $f : \Omega \to \hat{\Omega}$. Sei $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von $\hat{\mathfrak{F}}$, d.h. $\hat{\mathfrak{F}} = \sigma(\mathcal{E})$.
Zeigen Sie:

$$f \text{ ist } \mathfrak{F} - \hat{\mathfrak{F}} - \text{messbar } \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{F}.$$

(vgl. Lemma 1.27)

3. Hausaufgabe: messbare Funktionen **6 Punkte**
Zeigen Sie die folgenden Aussagen, die aus den Sätzen 1.29 und 1.30 des Skriptes stammen:

(i) Sind f und g messbare, reellwertige Funktionen, so ist auch $f + g$ eine messbare Funktion.

(ii) Sei $f_1, f_2, \ldots$ eine Folge messbar-numerischer Funktionen.
Dann sind auch $f(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ und $g(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ messbar-numerische Funktionen.

4. Hausaufgabe: Messbarkeit und Integration **6 Punkte**
Sei Ω eine überabzählbare Menge und sei $\mathcal{S}$ die σ-Algebra aller abzählbaren oder coabzählbaren (d.h. das Komplement ist abzählbar) Teilmengen von Ω. Aus der ersten Übung ist bekannt, dass es sich um eine σ-Algebra handelt.

(i) Zeigen Sie, dass eine numerische Funktion $\Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ genau dann messbar ist, wenn sie auf einer (von der Funktion abhängigen) coabzählbaren Menge konstant ist.

(ii) Sei $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ die Funktion, die jedem abzählbaren $A \in \mathcal{S}$ den Wert 0 und jedem coabzählbaren $B \in \mathcal{S}$ den Wert ∞ zuordnet. Zeigen Sie, dass μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{S})$ definiert.

(iii) Bestimmen Sie alle μ-integrierbaren Funktionen sowie deren Integrale.