

### 3. Übung Algebra II

#### 1. Aufgabe

Gebt den Zerfällungskörper des Polynoms  $t^3 - 5$  über  $\mathbb{Q}$  und alle seine  $\mathbb{Q}$ -Automorphismen an.

**(4 Punkte)**

#### 2. Aufgabe

Bestimmt, ob die folgenden Polynome separabel sind:

(a)  $f = t^2 - 6t + 9 \in \mathbb{Q}[t]$ ,

(b)  $g = t^{60} + t^{30} + 1 \in \mathbb{F}_2[t]$ ,

(c)  $h = t^5 + xt + x \in \mathbb{F}_5(x)[t]$  wobei  $x$  transzendent über  $\mathbb{F}_5$  ist.

**(4 Punkte)**

#### 3. Aufgabe

Sei  $L/K$  eine Körpererweiterung in Charakteristik  $p > 0$  und  $\alpha \in L$  ein über  $K$  algebraisches Element. Zeigt, dass das Minimalpolynom von  $\alpha$  über  $K$  genau dann separabel ist, wenn  $K(\alpha) = K(\alpha^p)$  gilt.

**(6 Punkte)**

#### 4. Aufgabe

Sei  $L/K$  eine algebraische Erweiterung. Beweist die folgenden Aussagen:

(a) Wenn  $K$  vollkommen ist, so ist auch  $L$  vollkommen.

(b) Sei  $L = K(\alpha)$  vollkommen und das Minimalpolynom von  $\alpha$  über  $K$  sei separabel. Zeige, dass dann ist auch  $K$  vollkommen ist.

**(6 Punkte)**