TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS11/12
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Tobias Finis
Assistent: Gerriet Möhlmann
www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS11/algebra2

4. Übung Algebra II

1. Aufgabe

Sei E/K eine endliche Erweiterung vom Grad n mit K-Basis $\{a_1, \dots a_n\}$ und $a_i \in E$. Ferner besitze $\mathrm{Hom}_K(E, \bar{K})$ genau $m \leq n$ verschiedene Elemente σ_i. Mit $a_i^{(j)}$ bezeichne das Element $\sigma_j(a_i)$. Nun betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \dots & a_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & \dots & a_n^{(m)} \end{pmatrix}$$

und definiere $D(a_1, \dots, a_n) := \frac{n}{m} \det(MM^t)$. Zeigt, dass E/K genau dann separabel ist, wenn $D(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ gilt. Eine Möglichkeit das zu zeigen besteht darin erst, einfache Erweiterungen und Vandermonde-Matrizen zu betrachten.

(6 Punkte)

2. Aufgabe

Findet eine Erweiterung $L_1/\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(L_1) \cong C_4$ und eine Erweiterung $L_2/\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(L_2) \cong C_2 \times C_2$ wobei $C_i \cong (\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}, +)$ die zyklischer Gruppe mit i Elementen bezeichnet.

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Zeigt, dass dann

$$\mathrm{End}_K(L) = \mathrm{Aut}_K(L)$$

gilt. Gebt ein Beispiel dafür an, dass die Aussage falsch wird, wenn man nur die Voraussetzung E/K Körpererweiterung macht.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Beweist oder widerlegt: Seien E/F und F/K normale Körpererweiterungen. Dann ist auch E/K normal.

(4 Punkte)