TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS11/12
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Tobias Finis
Assistent: Gerriet Möhlmann
`www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS11/algebra2`

5. Übung Algebra II

1. Aufgabe

Sei E/K eine Körpererweiterung vom Grad 2^n der Gestalt $E = K(\sqrt{a_1}, \dots \sqrt{a_n})$ mit $a_i \in K$. Gelte $char(K) \neq 2$. Zeigt, dass die Erweiterung E/K galoisch ist. Wie operiert die Galoisgruppe auf E? Beweist, dass $E = K(\sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_n})$ gilt.

(6 Punkte)

2. Aufgabe

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ eine quadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ und $L = K(\sqrt{\mu})$ mit $\mu = a + b\sqrt{m} \neq 0,\ a, b \in \mathbb{Q}$.

(a) Zeigt, dass $L/\mathbb{Q}$ genau dann normal ist, wenn $a^2 - mb^2$ ein Quadrat in K ist.

(b) Zeigt, dass $L/\mathbb{Q}$ genau dann zyklisch ist, wenn $a^2 - mb^2$ ein Quadrat in K aber nicht in $\mathbb{Q}$ ist, das heißt wenn $a^2 - mb^2 = mc^2$ gilt für ein $c \neq 0 \in \mathbb{Q}$

(c) Zeigt, dass der quadratische Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ genau dann Zwischenkörper einer zyklischen Erweiterung $L = K(\sqrt{\mu})$ wie oben ist, wenn m die Summe zweier Quadrate in $\mathbb{Q}$ ist.

(8 Punkte)

3. Aufgabe

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \xi)$ mit $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

(a) Gebt ein Polynom an, dessen Zerfällungskörper K ist,

(b) gebt das Minimalpolynom von ξ an,

(c) beschreibt die Elemente von $G :=$Gal$(K/\mathbb{Q})$,

(d) beschreibt die Gruppenstruktur von G,

(e) zeigt, dass $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \xi)$ gilt,

(f) gebt das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2} + \xi$ an.

(6 Punkte)