

9. Übung Algebra II

1. Aufgabe

Sei ζ eine primitive 9-te Einheitswurzel und definiere $\alpha := \zeta + \zeta^3$.

- Gebt das Minimalpolynom von ζ über \mathbb{Q} an.
- Sei G die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$. Zeigt, dass $\{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in G\}$ eine Normalbasis der Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ ist.
- Gebt eine $\mathbb{Q}(\zeta^3)$ -Basis von $\mathbb{Q}(\zeta)$ an.
- Betrachte die Galoisgruppe H von $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\zeta^3)$ als Untergruppe von G und zeigt, dass $\{\tau(\alpha) \mid \tau \in H\}$ linear abhängig über $\mathbb{Q}(\zeta^3)$ ist.

(8 Punkt)

2. Aufgabe

- Zeigt, dass für $p \in \mathbb{P}$ und ζ_p eine primitive p -te Einheitswurzel die Bilder von ζ_p unter der Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ eine Normalbasis bilden.
- Gebt ein $n \in \mathbb{N}$ an, für das die Bilder von ζ_n keine Normalbasis liefern.

(6 Punkte)

3. Aufgabe

Berechnet die folgenden Normen $N_{L/K}(a)$ für

- $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $K = \mathbb{Q}$, $a = 1 + 2\sqrt{2}$.
- $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$, $a = e^{3i}$.
- $L = \mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{5})$, $K = \mathbb{Q}(\zeta_3)$, $a = 2\sqrt[3]{5}$ wobei ζ_3 eine primitive 3-te Einheitswurzel ist.
- $L = \mathbb{F}_2(\alpha)$, $K = \mathbb{F}_2$, $a = \alpha + 1$ wobei α eine Nullstelle des Polynoms $t^2 + t + 1$ ist.
- $L = \mathbb{Q}(\alpha)$, $K = \mathbb{Q}$, $a = 23$ wobei α eine Nullstelle des Polynoms $t^5 + 4t^4 + 2t^2 - 2$ ist.

(6 Punkte)