TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS11/12
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Tobias Finis
Assistent: Gerriet Möhlmann
`www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS11/algebra2`

12. Übung Algebra II

1. Aufgabe

(a) Gebt eine algebraische Erweiterung K von $\mathbb{Q}$ an, mit $[K : \mathbb{Q}] = \infty$ und $[\bar{\mathbb{Q}} : K] = \infty$, falls sowas existiert.

(b) Gebt eine algebraische Erweiterung K von $\mathbb{Q}$ an, mit $[K : \mathbb{Q}] = \infty$ und $1 < [\bar{\mathbb{Q}} : K] < \infty$, falls sowas existiert.

(c) Gebt für $i \in \mathbb{N}$ eine Kette algebraischer Erweiterungen K_i von $\mathbb{Q}$ an, mit $[K_1 : \mathbb{Q}] = \infty$ und $[K_{i+1} : K_i] = \infty$, falls sowas existiert.

(6 Punkt)

2. Aufgabe

Sei G eine Gruppe und $\mathcal{B}$ die Menge der Normalteiler von G von endlichem Index. Dann ist $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis der 1 (das braucht ihr nicht zeigen sondern könnt ihr verwenden). Zeigt, dass G mit der von $\mathcal{B}$ erzeugten Topologie diskret ist, genau wenn G endlich ist.

(7 Punkte)

3. Aufgabe

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und

$$\mathcal{O} := \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}$$

eine Familie von Teilmengen von X.

(a) Zeigt, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X ist.

(b) Welche ist das für X endlich?

(c) Zeigt, dass jede Teilmenge von $(X, \mathcal{O})$ kompakt ist.

(d) Wann ist $(X, \mathcal{O})$ hausdorffsch?

(7 Punkte)