Numerik I, WiSe 2012/13

Dozent: Prof. Dr. G. Bärwolff Assistentin: Dr. Lena Scholz

Probeklausur Numerik I, 4. Februar 2013

Aufgabe 1

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie

a) die LR-Zerlegung von A

b) ausgehend von der LR-Zerlegung eine Cholesky-Zerlegung von A

c) die Konditionszahl von A (Zeilensummennorm)

Hinweis: Nutzen Sie die LR- bzw. Cholesky-Zerlegung zur Berechnung der Inversen von A.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von A und lösen Sie das Minimumproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} ||Ax - b||_2^2$$

mit $b = (1, 0, 1, 0)^T$.

Aufgabe 3

Sei

$$Q(f) := w_1 \, f(x_1)$$

eine Quadraturformel mit einem Knoten x_1 für das Integral

$$\int_0^1 f(x) \, dx .$$

Bestimmen Sie $x_1 \in [0, 1]$ und $w_1 \in \mathbb{R}$ so, dass der Genauigkeitsgrad maximal wird.

Aufgabe 4

Gegebene ist das AW-Problem

$$y'' = \ln(t^2 + y^2 + 1) \ , \ \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0 \ . \tag{1}$$

Formulieren Sie ein zu (1) äquivalentes AW-Problem erster Ordnung und berechnen Sie die Näherung y_1 der exakten Lösung y an der Stelle $t = h = 0,1$ mit dem expliziten Euler-Verfahren.

Aufgabe 5
Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens mit der Butcher-Tabelle

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

Aufgabe 6
Zeigen Sie, dass das lineare 2-Schrittverfahren

$$y_{k+1} + \frac{1}{5}y_k - \frac{6}{5}y_{k-1} = h(\frac{21}{10}f_k + \frac{1}{10}f_{k-1})$$

konsistent ist und untersuchen Sie es auf Nullstabilität.

Aufgabe 7
Eine Lösung $\hat{x}$ der Gleichung $x^3 - 4x + \frac{4}{5} = 0$ soll näherungsweise bestimmt werden.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : [-1, 1] \to \mathbb{R}\ , \quad g(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{1}{5}\ ,$$

eine Kontraktion ist und damit der Banachsche Fixpunktsatz anwendbar ist.

b) Geben Sie eine Kontraktionskonstante κ an.

c) Weisen Sie für die Fixpunktiteration $x_{k+1} = g(x_k)$ mit einem Startwert $x_0 \in [-1, 1]$ die A-priori- bzw. A-posteriori-Abschätzungen

$$|x_k - \hat{x}| \leq \frac{\kappa^k}{1-\kappa}|x_1 - x_0| \quad \text{bzw.} \tag{2}$$

$$|x_k - \hat{x}| \leq \frac{1}{1-\kappa}|x_{k+1} - x_k| \tag{3}$$

nach.

d) Bestimmen Sie unter Nutzung der Fehlerabschätzungen (2) bzw. (3) die minimale Anzahl k von Fixpunkt-Iterationsschritten mit dem Startwert $x_0 = 0$ zur Bestimmung einer Näherung x_k der Lösung $\hat{x}$ mit

$$|x_k - \hat{x}| \leq \frac{1}{1000}\ .$$

Aufgabe 8
Forumlieren Sie ein Newton-Verfahren zur Lösung $\vec{w} = (x, y, \lambda)$ des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} y^2 + \lambda 2x &= 0 \\ 2xy + \lambda 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

und berechnen Sie die erste Näherung $\vec{w}^{(1)}$ für $\vec{w} = (x, y, \lambda)$ mit dem Startwert $\vec{w}^{(0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.