Numerik I, WiSe 2012/13

Dozent: Prof. Dr. G. Bärwolff — Assistentin: Dr. Lena Scholz

Lösungen der Probeklausur Numerik I, 4. Februar 2013

Aufgabe 1

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie

a) nach 2 Schritten erhält man die LR-Zerlegung

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} , \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} .$$

von A

b) Mit der Diagonalmatrix $D^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ erhält man mit

$$G = LD^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

die Cholesky-Zerlegung

$$A = GG^T .$$

c) Mit der Inversen von A

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

erhält man die Konditionszahl

$$\mathrm{cond}_\infty(A) = 4 \cdot 2 = 8$$

für die Zeilensummennorm.

Aufgabe 2

Mit einer Householder-Transformation findet man die orthogonale Matrix

$$Q = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & 14 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

und

$$S = Q^T A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

also

$$A = QS \; .$$

Für $Q^T b$ ergibt sich

$$Q^T b = [1 \; , -\frac{1}{3} \; , \frac{14}{15} \; , -\frac{2}{15}]^T \; .$$

Die Lösung des Minimumproblems ergibt sich als Lösung der linearen Gleichungssytems

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

zu $x_1 = \frac{5}{9}$ und $x_2 = \frac{1}{9}$.
Man kann die Minimumaufgabe auch als Lösung der Normalgleichung

$$A^T A\mathbf{x} = A^T b$$

bestimmen.

Aufgabe 3
Polynome 1. Grades kann man exakt mit der Quadraturformel

$$Q(f) = 1 \cdot f(\frac{1}{2})$$

integrieren. Polynome 2. Grades dagegen nicht mehr, so dass der Genauigkeitsgrad 1 ist.

Aufgabe 4
Für $\mathbf{w} = (u,v)^T := (y,y')^T$ lautet das AWP 1. Ordnung

$$\mathbf{w}' = \begin{pmatrix} v \\ \ln(t^2+u^2+1) \end{pmatrix} := \mathbf{f}(t,\mathbf{w}) \; , \quad \mathbf{w}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; .$$

Mit $h = 0,1$ ergibt sich

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0 + h\mathbf{f}(0,\mathbf{w}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \ln(0^2+1^2+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,1 \cdot \ln(2) \end{pmatrix} \; .$$

Aufgabe 5
Mit der Verfahrensfunktion

$$\Phi(t,y,h) = \frac{1}{4}f(t,y) + \frac{3}{4}f(t+\frac{2}{3}h, y+\frac{2}{3}hf(t,y))$$

und

$$\frac{d\Phi}{dh}(t,y,0) = \frac{1}{2}f_t(t,y) + \frac{1}{2}f_y(t,y)f(t,y) = \frac{1}{2}y''(t)$$

sowie

$$\Phi(t,y,h) = \Phi(t,y,0) + h\frac{d\Phi}{dh}(t,y,0) + O(h^2) = f(t,y) + h\frac{1}{2}y''(t)$$

findet man für den lokalen Diskretisierungsfehler

$$d_{k+1} = y(t+h) - y(t) - h\Phi(t,y,h) = hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) - h\,f(t,y) - \frac{h^2}{2}y''(t) + O(h^3) = O(h^3)$$

und damit die Konsistenzordnung $p = 2$.

Aufgabe 6
Das erste charakteristische Polynom lautet $\rho(z) = z^2 + \frac{1}{5}z - \frac{6}{5}$ mit den Nullstellen

$$z_{1,2} = -\frac{1}{10} \pm \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{6}{5}} \; ,$$

d.h.

$$|z_1| = |-\frac{1}{10} - \sqrt{\frac{121}{100}}| = |-\frac{12}{10}| > 1$$

also ist das Verfahren nicht nullstabil.
Die Konsistenz erhält man durch Taylorentwicklungen der exakten Lösung

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + O(h^3)\ , \quad y(t-h) = y(t) - hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + O(h^3)$$

und

$$\begin{aligned} f(t-h, y(t-h)) &= f(t, y(t)) - h[f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))f(t, y(t))] + O(h^2) \\ &= f(t, y(t)) - hy''(t) + O(h^2) \end{aligned}$$

für den lokalen Diskretisierungsfehler

$$\begin{aligned} d \quad &= y(t+h) + \tfrac{1}{5}y(t) - \tfrac{6}{5}y(t-h) && -h[\frac{21}{10}f(t, y(t)) + \frac{1}{10}f(t-h, y(t-h))] \\ &= h\tfrac{11}{5}y'(t) - \tfrac{1}{10}h^2y''(t) && -h[\frac{11}{5}f(t, y(t)) + h\frac{1}{10}\{f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))f(t, y(t))\}] + O(h^3) \\ &= h\tfrac{11}{5}y'(t) - \tfrac{1}{10}h^2y''(t) && -h\frac{11}{5}y'(t) + \frac{1}{10}h^2y''(t) + O(h^3) \\ &= O(h^3) && , \end{aligned}$$

so dass das Verfahren die Ordnung $p = 2$ hat.

Aufgabe 7

Eine Lösung $\hat{x}$ der Gleichung $x^3 - 4x + \frac{4}{5} = 0$ soll näherungsweise bestimmt werden.

a,b) Es gilt offensichtlich

$$g([-1,1]) \subset [-1,1]$$

und

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|\ ,$$

da

$$\kappa = \max_{x\in[-1,1]} |g'(x)| = \frac{3}{4}$$

ist, und damit ist g eine Kontraktion.

c) Mit $(m > n)$

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| \quad &= \quad |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - ... + x_{m-1} - x_m| \\ &\leq \quad |x_n - x_{n+1}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\ &\leq \quad \kappa^n(1 + \kappa + \cdots + \kappa^{m-n-1})|x_1 - x_0| \\ &\leq \quad \frac{\kappa^n}{1-\kappa}|x_1 - x_0|\ , \end{aligned}$$

also

$$|x_n - x_m| \leq \frac{\kappa^n}{1-\kappa}|x_1 - x_0|$$

(hier wurde die geometrische Reihe benutzt) weist man nach, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist und damit konvergent mit dem Grenzwert $\hat{x}$ ist (er ist eindeutig bestimmt). Für $m \to \infty$ erhält man unter Nutzung der Stetigkeit der Betragsfunktion

$$|x_n - \hat{x}| \leq \frac{\kappa^n}{1-\kappa}|x_1 - x_0| \, ,$$

also die A-priori-Abschätzung. Für $n = 0$ folgt daraus

$$|x_0 - \hat{x}| \leq \frac{1}{1-\kappa}|x_1 - x_0| \quad \text{bzw.} \quad |x - \hat{x}| \leq \frac{1}{1-\kappa}|g(x) - x|$$

und damit für $x_n = x$ die A-posteriori-Abschätzung.

d) Unter Nutzung der A-posteriori-Abschätzung erhält man nach 3 Schritten mit $x_2 = 0,202$ die geforderte Genauigkeit, da mit $x_3 \approx 0,20206$

$$|x_2 - \hat{x}| \leq \kappa|x_3 - x_2| \approx \frac{3}{4} \cdot 0,00006 = \frac{0,45}{1000} < \frac{1}{1000}$$

gilt.

Aufgabe 8
Es ist die Nullstelle der Abbildung

$$\mathbf{f}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} y^2 + \lambda 2x \\ 2xy + \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Für die Ableitung ergibt sich

$$\mathbf{f}'(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 2y & 2x \\ 2y & 2x + 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} ,$$

und damit das Newtonverfahren

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} - [\mathbf{f}'(w^{(k)})]^{-1}\mathbf{f}(w^{(k)}) \, .$$

Für $w^{(0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ ist für $z = w^{(1)} - w^{(0)}$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} z = - \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

zu lösen und es gilt letztendlich

$$w^{(1)} = z + w^{(0)} \approx (0.91667, 0.58333, -1.16667)^T \, .$$