Diskretisierung elliptischer Randwertaufgaben

Die zweidimensionale Poisson-Gleichung

Numerische Mathematik 1
WS 2012/13

Die Poisson-Gleichung

Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) \quad \text{für } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

mit dem Laplace-Operator

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Dabei sei

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Rand $\partial\Omega$,
- $f \in C(\bar{\Omega})$ und $g \in C(\partial\Omega)$,
- $u \in C_2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$ die gesuchte Lösung.

Die Poisson-Gleichung für $n = 1$

Für $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad \text{für } a < x < b, \quad f \in C([a, b]) \\ u(a) &= g_a \in \mathbb{R}, \\ u(b) &= g_b \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

und $u \in C_2([a, b])$ ist die gesuchte Lösung.

Anwendung

Die Poisson-Gleichung beschreibt eine Vielzahl physikalischer Phänomene, wie z.B.:

- das elektrostatischen Potentials u zu gegebener Ladungsdichte f
- das Gravitationspotentials u zu gegebener Massendichte f
- die Temperaturverteilung u im stationären Zustand bei gegebener Verteilung von Wärmequellen f
- die Auslenkung einer eingespannten Membran
- das Potential einer stationären inkompressiblen, reibungsfreien Strömung

Die Poisson-Gleichung im Einheitsquadrat des $\mathbb{R}^2$

Wir betrachten im folgenden

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) \qquad \text{für } (x,y) \in \Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x,y) &= 0 \qquad\qquad \text{für } (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

mit dem 2D-Laplace-Operator

$$\Delta u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$$

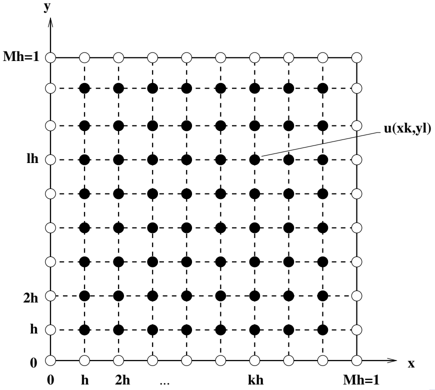
und

- $u \in C_2((0,1)^2) \cap C_0([0,1]^2)$
- $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ stetig
- $g \equiv 0$ stetig differenzierbar auf $\partial\Omega$

Diskretisierung

- Wir approximiere die Poisson-Gleichung auf einem äquidistente Gitter
- mit Schrittweite $h = 1/M$ erhalten wir die Gitterpunkte

$$\bar{\Omega}_h = \{(x_k, y_\ell) = (kh, \ell h) \,|\, k, \ell = 0, 1, \ldots, M\} \subset \bar{\Omega}$$



Die Approximation

- Wir approximieren die Lösung u auf dem Gitter $\bar{\Omega}_h$, d.h.

$$u_{k,\ell} \approx u(kh, \ell h) \quad \text{für alle } (kh, \ell h) \in \bar{\Omega}_h.$$

- Für genügend glattes $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und kleines $h > 0$ ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) \approx \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \approx \frac{u(x,y+h) - 2u(x,y) + u(x,y-h)}{h^2}$$

- damit erhalten wir den diskreten Laplace-Operator

$$\Delta_h u(x,y) = \frac{1}{h^2}[u(x+h,y) + u(x-h,y) - 4u(x,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h)]$$

Die diskrete Poisson-Gleichung

Für $(x_k, y_\ell) = (kh, \ell h)$ ist also

$$
\begin{aligned}
& - f(x_k, y_\ell) \approx \Delta u_h(x_k, y_\ell) \\
& = \frac{u(x_{k-1}, y_\ell) + u(x_{k+1}, y_\ell) + u(x_k, y_{\ell-1}) + u(x_k, y_{\ell+1}) - 4u(x_k, y_\ell)}{h^2}
\end{aligned}
$$

Setzt man $f_{k,\ell} := f(x_k, y_\ell)$ so erhält man die linearen Gleichungen

$$
-f_{k,\ell} = \frac{u_{k+1,\ell} - 4u_{k,\ell} + u_{k-1,\ell} + u_{k,\ell-1} + u_{k,\ell+1}}{h^2}
$$

für $u_{k,\ell} \approx u(x_k, y_\ell)$ für $k, \ell = 1, \ldots, M-1$ (innere Punkte) zusammen mit den Randbedingungen

$$
u_{0,\ell} = u_{M,\ell} = u_{k,0} = u_{k,M} = 0 \quad \text{für } k, \ell = 0, \ldots, M.
$$

Nummerierung der Gitterpunkte

- Zeilenweise Nummerierung der Gitterpunkte (von links unten nach rechts oben).
- Für $M = 8$ erhält man z.B.:

43	44	45	46	47	48	49
36	37	38	39	40	41	42
29	30	31	32	33	34	35
22	23	24	25	26	27	28
15	16	17	18	19	20	21
8	9	10	11	12	13	14
1	2	3	4	5	6	7

Matrixdarstellung

Damit erhält man die folgende Matrixdarstellung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B & -I & & & \\ -I & B & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & B & -I \\ & & & -I & B \end{bmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{N\times N}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{M-2} \\ U_{M-1} \end{bmatrix}}_{U \in \mathbb{R}^N} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{M-2} \\ F_{M-1} \end{bmatrix}}_{F \in \mathbb{R}^N}$$

mit

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix}, \; U_i = \begin{bmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \\ \vdots \\ u_{M-2,i} \\ u_{M-1,i} \end{bmatrix}, \; F_i = \begin{bmatrix} f_{1,i} \\ f_{2,i} \\ \vdots \\ f_{M-2,i} \\ f_{M-1,i} \end{bmatrix}.$$

Das lineares Gleichungssystem

Wir erhalten ein lineares Gleichungssystem

$$A \cdot U = F$$

der Dimension $N = (M-1)^2$ (Anzahl innerer Gitterpunkte) und

- A ist tridiagonale Block-Matrix bzw. Bandmatrix
- A ist dünnbesetzt ("Sparse")
- A ist irreduzibel diagonaldominant
- A ist M-Matrix
- A ist konsistent geordnet

Weitere Matrix Eigenschaften

- $A = [a_{ij}] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ heißt **M-Matrix** falls
  (i) A ist regulär und A^{-1} hat nur nichtnegative Einträge, d.h. $A^{-1} \succeq 0$ (komponentenweise) und
  (ii) alle Nicht-Diagonaleinträge von A sind nichtpositiv, d.h. $a_{ij} \leq 0$ für alle i, j mit $i \neq j$.
- A mit $a_{ii} \neq 0$ für alle i heißt **konsistent geordnet**, wenn die Eigenwerte der Matrix

$$C(\alpha) := \frac{1}{\alpha} D^{-1} L + \alpha D^{-1} R \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

  unabhangig von α sind, wobei $A = L + D + R$ (Standardzerlegung).

Konvergenzbeweise iterativer Verfahren für M-Matrizen bzw. konsistent geordneter Matrizen findet man u.a. in [Plato].