Technische Universität Berlin **Wintersemester 20012/2013**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Lena Scholz

Numerische Mathematik I

1. Übungsblatt: Rechnerarithmetik und Rundungsfehler

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 29. Oktober 2012)

Aufgabe 1: **(10 Punkte)**
Es gelte $x \oplus y = (x + y)(1 + \epsilon)$ mit $|\epsilon| \le k \cdot \text{eps} =: \epsilon^*$ für alle Maschienenzahlen x und y. Seien nun Maschienenzahle $x_1, \dots, x_n$ gegeben und sei durch

$$\tilde{s}_1 = x_1, \quad \tilde{s}_k = \tilde{s}_{k-1} \oplus x_k$$

ein Algorithmus zur Berechnung der Summme $s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$, $k \le n$ definiert.

(a) Zeigen Sie: zerlegt man $\tilde{s}_k = s_k + f_k$, so gilt

$$|f_n| \le [(1 + \epsilon^*)^n - 1] \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Diskutieren Sie den relativen Fehler von $\tilde{s}_n$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\tilde{s}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i(1 + \delta_i) \quad \text{mit} \quad (1 - \epsilon^*)^n - 1 \le \delta_i \le (1 + \epsilon^*)^n - 1$$

und falls $n\epsilon^* < 1$ gilt:

$$|\delta_i| \le \frac{n\epsilon^*}{1 - n\epsilon^*}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**
Man betrachte die folgende Tabelle mit jeweils mathematisch äquivalenten Ausdrücke unter a) und b)

	a)	b)	
1.)	$(1 + x)^2 - 1$	$x^2 + 2x$	$\lvert x\rvert \approx eps$
2.)	$\frac{e^x - 1}{x}$	$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}$	$0 < x \le eps$
3.)	$(1 + x)(1 - x)$	$1 - x^2$	$\lvert x\rvert \approx eps$

Bei welchen Ausdrücken tritt Auslöschung auf? Unterziehen sie sämtliche Ausdrücke einer Fehleranalyse.

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**
Zu lösen sei die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2px - q = 0 \quad \text{für} \quad p = 2,\ q = 0.0005$$

in vier- und fünfstelliger Gleitkommaarithmetik im Dezimalsystem. Dabei sollen die folgenden Algorithmen untersucht werden:

(i) $d = p^2 + q$, $x_1 = p + \sqrt{d}$, $x_2 = p - \sqrt{d}$, ($p - q$ Formel)

(ii) $d = p^2 + q$, $x_1 = p + \sqrt{d}$, $x_2 = -q/x_1$. (Vietascher Wurzelsatz)

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung und erklären Sie die unterschiedlichen Resultate.

Programmieraufgabe 1: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 2. November 2012)
Schreiben Sie Matlab-Programme

```
e=meps(),    m=minimum(),    m=maximum()
```

die das Maschienenepsilon `eps`, die kleinste darstellbare positive Zahl x_{min} bzw. die grösste darstellbare Zahl x_{max} berechnen. Dabei ist `eps` als die kleinste Zahl definiert für die $1 \oplus \texttt{eps} > 1$ gilt.
In den Programmen soll nur benutzt werden, dass intern eine Gleitkommadarstellung basierend auf dem Dualsystem verwendet wird. Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit denen der entsprechende MATLAB Funktionen (`eps`,`realmin`,`realmax`). Interpretieren Sie die Unterschiede.

Übungsaufgabe für die Tutorien:

Aufgabe 1:
Transformiere die folgenden Dezimalzahlen in ihre Binär- bzw. Hexadezimaldarstellung (d.h. $b = 2, 16$)

a) $x = 12.125$

b) $x = 0.1$

Aufgabe 2:
Es beschreibe $g(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$ eine Gerade mit eindeutiger Nullstelle x_0. Die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(a, b) = x_0$ gebe ein Verfahren an, welches aus den Koeffizienten a und b die Nullstelle berechnet. Berechnen Sie die relative und absolute Kondition des Verfahrens.

Aufgabe 3:
Man berechne die absolute und relative Kondition der folgenden Verfahren (jeweils für $x \geq 0$)

a) $f(x) = x^2$ für kleine und große x,

b) $f(x) = \sqrt{x}$ für kleine und große x.

Aufgabe 4:
Bei welchem der folgenden (analytisch gleichen) Ausdrücken tritt Auslöschung auf?

a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

b) $\frac{1}{n(n+1)}$

Man unterziehe beide Ausdrücke einer Fehleranalyse.