

Numerische Mathematik I

2. Übungsblatt: Normen, Konditionszahl, LR-Zerlegung

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 7. November 2012)

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- Durch $\|x\|_Q := \langle x, Qx \rangle^{\frac{1}{2}}$ ist eine Norm definiert, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n ist.
- Es gilt für die von $\|\cdot\|_Q$ induzierte Matrixnorm

$$\|A\|_Q = \sqrt{\rho(Q^{-1}A^TQA)},$$

wobei ρ der Spektralradius ist:

$$\rho(B) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ Eigenwert von } B\}.$$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Seien $A, B, Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbare Matrizen und Q zusätzlich orthogonal, sowie $\alpha \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei eine submultiplikative Norm $\|\cdot\|_*$ auf $\mathbb{R}^{n,n}$ gegeben. Zeigen Sie folgende Beziehungen:

- $\kappa_*(AB) \leq \kappa_*(A)\kappa_*(B)$,
- $\kappa_*(\alpha A) = \kappa_*(A)$,
- $\kappa_2(Q) = 1$,
- $\kappa_2(A) \leq \kappa_F(A) \leq n\kappa_\infty(A)$,
- $\kappa_2(QA) = \kappa_2(A)$.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Gegeben sei eine nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, wobei

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 1, \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

gelte. Zeigen Sie, dass für jede nichtsinguläre Diagonalmatrix D die folgende Ungleichung gilt:

$$\kappa_\infty(DA) \geq \kappa_\infty(A).$$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

$$\text{Sei } A = \begin{bmatrix} 3 & 17 & 10 \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 18 & -12 \end{bmatrix}.$$

1. Berechnen Sie die LR-Zerlegung mit partieller Pivotisierung von A .

2. Lösen Sie mit Hilfe der LR-Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ wobei $b = \begin{bmatrix} 30 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$.

Programmieraufgabe 2: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 9. November 2012)
 Programmieren Sie die LR-Zerlegung mit partieller Pivotisierung und, dazu passend, das Vorwärts- und Rückwärts-Einsetzen. Schreiben sie dazu eine Funktion

```
function fact = lr_zerlegung(A)
```

welche die LR-Zerlegung mit partieller Pivotisierung einer Matrix berechnet und in der Struktur `fact` (`>> help struct`) speichert. Schreiben Sie eine weitere Funktion

```
function x = vor_rueck(fact, b)
```

die `fact` aus der Funktion `lr_zerlegung(A)` und einen Vektor `b` übergeben bekommt und damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ löst.

Benutzen Sie hierzu die auf der Webseite des Kurses hinterlegten Templates und zum Testen der Funktionen die Datei `RUNME.m`. Für die Abgabe der Programmieraufgabe muss die Datei fehlerfrei durchlaufen und eine Ausgabe produzieren, die in etwa wie in Abbildung 1 aussieht.

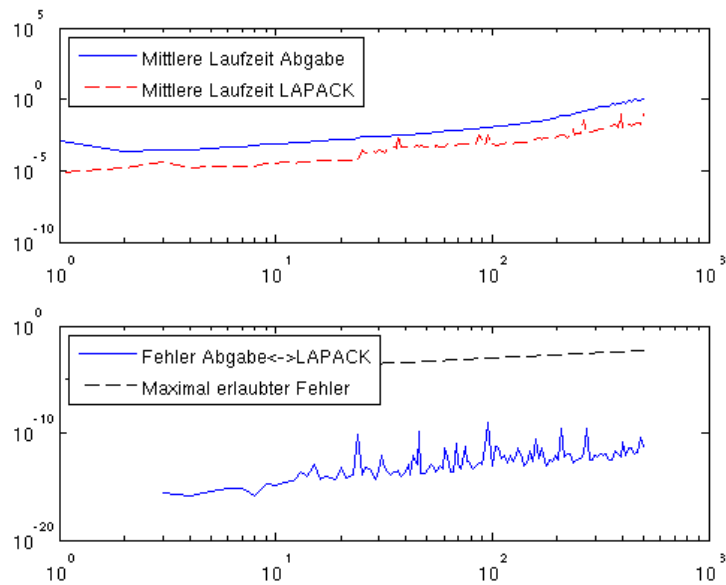


Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgabe von RUNME

Übungsaufgabe für die Tutorien:

Aufgabe 1:

Zeigen Sie dass die folgenden Ungleichungen gelten für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$
- $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$
- $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$
- $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

Aufgabe 2:

Es bezeichne $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf dem \mathbb{R}^n und gleichzeitig

$$\|A\| := \max \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

die induzierte Matrixnorm. Es bezeichnen A, B geeignete Matrizen und $b \neq 0$ einen Vektor mit passender Dimensionen. Zeigen Sie:

- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$,
- $\frac{1}{\|A^{-1}b\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$.

Zeigen Sie noch, dass für die speziellen Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_F$ gilt:

- $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$, d.h. Submultiplikativität der Frobeniusnorm,
- $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$, für alle $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $x \in \mathbb{R}^m$, d.h. Verträglichkeit von $\|\cdot\|_F$ mit $\|\cdot\|_2$,
- $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die Kondition der Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ bezüglich $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_F$.

Aufgabe 4:

Sei

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A .
- Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.
- Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit partieller Pivotisierung.

Aufgabe 5:

Lösen Sie das System $Ax = b$ für

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 6 & -10 & 10 \\ -6 & 6 & -12 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 27 \\ 46 \\ -54 \end{bmatrix}$$

durch LR-Zerlegung mit partieller Pivotisierung.