Technische Universität Berlin **Wintersemester 20012/2013**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Lena Scholz

Numerische Mathematik I

3. Übungsblatt: Cholesky-Zerlegung, Singulärwertzerlegung

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 14. November 2012)

Aufgabe 1: **(4 Punkte)**
Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung und die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2: **(6 Punkte)**
Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n+1,n+1}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} R & v \\ w^T & 0 \end{bmatrix}, \quad R \in \mathbb{R}^{n,n},\ v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Zusätzlich sei R eine invertierbare obere Dreiecksmatrix.

(a) Geben Sie die LR-Zerlegung der Matrix A an.

(b) Zeigen Sie, dass A genau dann nichtsingulär ist, wenn $w^T R^{-1} v \neq 0$.

(c) Formulieren Sie einen Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ und geben Sie den Aufwand in Abhängigkeit von n an.

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**
Gegeben sei eine strikt diagonaldominante Marix $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n,n}$, das heißt es gelte

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |a_{ij}| \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens, dass A^T eine LR-Zerlegung besitzt und invertierbar ist. Folgern Sie, dass A ebenfalls eine LR-Zerlegung besitzt.

Aufgabe 4: **(5 Punkte)**
Sei $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ eine Matrix und $A = U\Sigma V^T$ ihre Singulärwertzerlegung, d.h. die Diagonalmatrix $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\min(n,m)}) \in \mathbb{R}^{n,m}$ enthalte die Singulärwerte $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_{\min(n,m)} \geq 0$ und die quadratischen Matrizen U, V seien orthogonal. Sei $r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\hat{C} := U \cdot \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \cdot V^T$$

die beste Rang r Approximation an A ist, d.h. dass $\hat{C}$ die Gleichung

$$\min_{C \in \mathbb{R}^{n,m}, \operatorname{rang}(C) \leq r} \|A - C\|_F^2 = \|A - \hat{C}\|_F^2 = \sigma_{r+1}^2 + \cdots + \sigma_{\min(n,m)}^2$$

erfüllt.

Programmieraufgabe 3: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 16. November 2012)
Schreiben Sie ein Programm `cholesky` welches die Cholesky-Zerlegung GG^T einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ berechnet, wobei G eine untere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen ist. Der Aufruf soll mit

```
G=cholesky(A)
```

erfolgen und als Eingabe eine symmetrische, positiv definite $n \times n$ Matrix `A` erhalte. Als Rückgabe `G` soll die Funktion eine Matrix der Größe $n \times n$ liefern, wobei im unteren Dreieck von G die unteren Einträge von G stehen.
Schreiben Sie außerdem ein Programm `C_rekursion` welches ausgehend von der brechneten Cholesky-Zerlegung die Lösung des Gleichungssystems $GG^Tx = b$ berechnet:

```
x=C_rekursion(G,b)
```

mit der Eingabe `G`, wie bei der Ausgabe in `cholesky`, sowie `b` ein Vektor der Längen n. Ausgegeben werden soll `x`, die numerisch berechnete Lösung.
Vergleichen Sie Ihren Algorithmus mit dem Testbeispiel aus Hausaufgabe 1. Verwenden Sie Ihren Algorithmus außerdem zur Lösung des Gleichungssystems $Hx = b$ mit

$$H = [h_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad h_{ij} = (i + j - 1)^{-1},$$

$x = [1, 1, \dots, 1]^T$ und $b = Hx$. Vergleichen Sie für $n = 2, 3, 4, \dots, 30$ die numerische Lösung $\tilde{x}_n$ mit der exakten Lösung x anhand des absoluten Fehlers $\max_i |\tilde{x}_n(i) - x(i)|$ und interpretieren Sie die Ergebnisse.
Hinweis: die Matlab Funktion `hilb(n)` liefert die Hilbertmatrix der Dimension n.

Übungsaufgabe für die Tutorien:

Aufgabe 1:
Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \sigma_1, \qquad \text{(Spektralnorm)} \\ \|A\|_F &= \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_{\min(n,m)}^2}, \qquad \text{(Forbeniusnorm)} \end{aligned}$$

wobei $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_{\min(n,m)} \geq 0$ die Singulärwerte von A bezeichnen. Überlegen Sie sich, dass $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar ist, genau dann wenn $\sigma_n > 0$. In diesem Fall ist dann $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$ und $\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.

Aufgabe 3:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nichtsingulär. Zeigen Sie, dass gilt

$$\inf_{B \text{ singulär}} \left\{ \frac{\|A - B\|_2}{\|A\|_2} \right\} = \frac{1}{\kappa_2(A)}.$$

Aufgabe 4:
Berechnen Sie eine (dünne) Singulärwert-Zerlegung der Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$