Technische Universität Berlin **Wintersemester 20012/2013**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Lena Scholz

Numerische Mathematik I

5. Übungsblatt: Fixpunktiteration, Newton-Verfahren

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 28. November 2012)

Aufgabe 1: **(8 Punkte)**
Für welche der folgenden Gleichungen und welche Startwerte konvergiert die zugehörige Fixpunktiteration?

(a) $x = e^x - \sin x + x$

(b) $x = \sin x - e^x + x$

(c) $x = \arcsin e^x, x < 0$

(d) $x = \ln \sin x, \quad x \in (0, \pi)$

Aufgabe 2: **(6 Punkte)**
Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_1 = 0, \qquad \frac{10\,x_1}{x_1 + 0.1} + 2x_2^2 = 0,$$

dessen eindeutig bestimmte Lösung $(x_1, x_2) = (0, 0)$ ist.

(a) Führen Sie ausgehend von dem Startvektor $(0, 1)$ einen Newton-Schritt durch.

(b) Konvergiert das Newton-Verfahren in diesem Beispiel für alle genügend nahe an der Lösung liegenden Startvektoren? Geben Sie die maximale Teilmenge aller Punkte in der offenen Kugel um den Ursprung mit Radius 1/10, d.h. $U_{1/10}(0) = \{(x_1, x_2) \,|\, \|(x_1, x_2)\|_2 < 1/10\}$ an, so dass das Verfahren auf dieser Menge konvergiert.

Aufgabe 3: **(6 Punkte)**
Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad x_* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N,$$

so dass x_* die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ darstellt. Man zeige: das GMRES-Verfahren liefert die Vektoren $x_1 = x_2 = \ldots, x_{N-1} = 0$ und $x_N = x_*$ (d.h. das GMRES-Verfahren liefert in den Schritten $n = 1, 2, \ldots, N-1$ keine Approximation an die Lösung x_*, auch eine schrittweise Verbesserung tritt nicht auf).

Programmieraufgabe 4: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 30. November 2012)

Schreiben Sie ein MATLAB-Programm für das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion $0 = f(x)$ und ein MATLAB-Programm zur Fixpunktiteration angewandt auf $x = f(x) + x$. Verwenden Sie als Beispielprobleme die Funktionen

1. $f(x) = e^x - \sin x$,
2. $f(x) = \sin x - e^x$,
3. $f(x) = \arcsin(e^x) - x,\ x < 0$, und
4. $f(x) = \ln \sin(x) - x$,

und als Startwerten $x_0 = -\pi/4,\ -5\pi/4,\ -9\pi/4$. Vergleichen Sie die Ergebnisse bzgl. Rechengenauigkeit, Rechenaufwand und Konvergenz.
Verwenden Sie hierfür das auf der Homepage bereitgestellte Hauptfile (`script.m`) und die Masken der zu schreibenden Unterprogramme `newton.m` und `fixpunkt.m` . Außerdem die Beispieldateien `phi1n.m`, welche die rechte Seite $f(x)$ der Gleichung $0 = f(x)$ enthält (für das Newton-Verfahren), `dphi1n.m`, welche die Ableitung $f'(x)$ der rechten Seite enthält (für das Newton-Verfahren) und `phi1f.m`, welche die rechte Seite $f(x) + x$ der Fixpunktgleichung $x = f(x) + x$ enthält (für das Fixpunktverfahren). Die Routinen `phi2n.m`, `dphi2n.m`, `phi2f.m`, `phi3n.m`, `dphi3n.m`, `phi3f.m`, `phi4n.m`, `dphi4n.m` und `phi4f.m` sind in analoger Weise zu schreiben.

Übungsaufgabe für die Tutorien:

Aufgabe 1:
Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine streng konvexe und streng monoton wachsende Funktion, d.h. es gelte $f''(x) > 0$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, \infty)$. Außerdem besitze f eine (dann eindeutige) Nullstelle $x^\star \in [a, \infty)$. Man zeige, dass das Newton-Verfahren dann für jeden Startwert $x_0 \in [a, \infty)$ gegen die eindeutige Nullstelle $x^\star$ konvergiert.

Aufgabe 2:
Führen Sie einen Schritt mit dem Newton-Verfahren aus um das nichtlineare Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
exp(x^2 - y^2) - 3 &= 0 \\
x + y - \sin(2(x + y)) &= 0
\end{aligned}
$$

zu lösen. Benutzen Sie die Startwerte $x_0 = \pi$ und $y_0 = \pi$. An welchen Stellen ist das Differenzial singulär?

Aufgabe 3:
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine dreimal-stetig differenzierbare Funktion und $x^\star \in \mathbb{R}$ eine einfache Nullstelle von f, d.h. es gelte $f(x^\star) = 0$ aber $f'(x^\star) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die durch

$$
\begin{aligned}
y &:= x_k - f'(x_k)^{-1} f(x_k) \\
x_{k+1} &:= y - f'(x_k)^{-1} f(y)
\end{aligned}
$$

definierte Folge mindestens mit Ordnung 3 gegen $x^\star$ konvergiert.

Aufgabe 4:
Es seien $W, V \subset \mathbb{R}^n$ Teilräume mit $W \oplus V = \mathbb{R}^n$. Ferner seien die Spalten der Matrix X eine Basis von W und die Spalten von Z eine Basis von $V^\perp$. Zeigen Sie, dass dann

$$P := X(Z^T X)^{-1} Z^T \tag{1}$$

ein Projektor auf W entlang V ist. Zeigen Sie außerdem, dass die rechte Seite von (1) nicht von der Wahl der Basen X und Z abhängt.

Aufgabe 5:
Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ ein Teilraum und die Spalten der Matrix X_0 eine Orthonormalbasis von W. Dann ist

$$P := X_0 X_0^T$$

ein symmetrischer Orthogonalprojektor.

Aufgabe 6:
Geben Sie das Gram-Schmidt-Verfahren unter Benutzung von Projektoren an.