Technische Universität Berlin **Wintersemester 20012/2013**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Lena Scholz

Numerische Mathematik I

6. Übungsblatt: Newton-Verfahren

Hausaufgaben: (Abgabe <u>vor</u> der Vorlesung am 5. Dezember 2012)

Aufgabe 1: **(3 Punkte)**
Es soll der Term $\sqrt[k]{a}$, $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $a > 0$ berechnet werden. Geben Sie ein Funktion f und einen möglichst großen Definitionsbereich $U \subset \mathbb{R}$ an, sodass das entsprechende Newton-Verfahren für jeden Startwert $x_0 \in U$ gegen $\sqrt[k]{a}$ konvergiert.

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**
Zur Berechnung von $\sqrt{a}$, $a > 0$, sei das Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = A\, x_n + \frac{B}{x_n} + \frac{C}{x_n^3}$$

gegeben. Bestimmen Sie Koeffizienten A, B, C, so dass das Verfahren für alle $x_0 > \sqrt{a}$ kubisch gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Nullstelle von f, sodass das Differenzial $Df(x^*)$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass das vereinfachte Newton-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - (Df(x_0))^{-1} f(x_k)$$

für alle Startwerte x_0 aus einer Umgebung U von x^* linear gegen die eindeutige Nullstelle x^* konvergiert.

Aufgabe 4: **(7 Punkte)**
Gegeben Sei eine nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Man betrachte die durch

$$X_{k+1} := X_k + X_k(I - AX_k), \quad k = 0, 1, \ldots \qquad \text{(Verfahren von Schulz)}$$

definierte Folge von Matrizen $\{X_k\}_{k=0,1,\ldots}$. Zeigen Sie:

(a) Für $E_k := I - AX_k$ gilt $E_{k+1} = E_k E_k$ und $\|I - AX_0\| < 1$ ist hinreichende Bedingung für die Konvergenz von $\{X_k\}$ gegen A^{-1}.

(b) Das Verfahren von Schulz ist lokal quadratisch konvergent.

(c) Mit $AX_0 = X_0 A$ gilt auch $AX_k = X_k A$ für alle $k \geq 0$.

Programmieraufgabe 6: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 7. Dezember 2012)

Schreiben Sie Programme `bisek`, `regulaFalsi` und `newton` die für eine gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die skalare Gleichung $f(x) = 0$ lösen. Der Aufruf der Programme soll mit

```
[x,xa,fa] = bisek(f, x0, x1, tol, nmax)
[x,xa,fa] = regulaFalsi(f, x0, x1, tol, nmax)
[x,xa,fa] = newton(f, df, x0, tol, nmax)
```

erfolgen. Eingabeparameter sind

`f`	Handle der MATLAB-Funktion für f mit Schnittstelle `y = f(x)`,
`df`	Handle der MATLAB-Funktion für f' mit Schnittstelle `y = df(x)`,
`x0`, `x1`	Startpunkt x_0 (für Newtonverfahren), bzw. Startintervall $[x_0, x_1]$ für Bisektionsverfahren und Regula Falsi,
`tol`	Toleranz ϵ,
`nmax`	maximale Anzahl von Iterationen $n_{\max}$,

und Ausgabeparameter

`x`	Approximation der Nullstelle,
`xa`	Vektor der Iterationswerte $x_0, x_1, \ldots$,
`fa`	Vektor der Iterationswerte $f(x_0), f(x_1), \ldots$.

Dabei soll die Iteration abgebrochen werden, falls

$$|f(x_n)| + |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$$

oder die Anzahl der Iterationen $n_{\max}$ übersteigt.
Hinweis: Funktionen können durch sogenannte *function handles* übergegeben werden, wobei *anonymous functions* ebenfalls nützlich sind. Für weitere Informationen bitte unter den entsprechenden Stichworten in der MATLAB-Hilfe suchen.

Es seien die Funktionen

(a) $f_1(x) = x^3 - 20$,

(b) $f_2(x) = (x - \pi)^2 \tan(x)$

gegeben. Approximieren Sie die Nullstellen der Funktionen im Intervall $[2, 4]$ mit Hilfe des Bisektionsverfahrens, des Newtonverfahrens und der Regula Falsi.
Als Startwerte verwende man das Intervall $[2, 4]$ beim Bisektionsverfahren und der Regula Falsi und $x_0 = 2$ beim Newtonverfahren. Die maximale Anzahl von Iterationen sei auf 40 beschränkt und die Toleranz sei $\epsilon = 10^{-6}$.

1. Geben Sie für jede Funktion und jedes Verfahren eine formatierte Tabelle bestehend aus Iterationszahl n, der approximierten Nullstelle x_n und dem Funktionswert $f(x_n)$. Dabei soll die Stellenzahl ausreichen groß gewählt werden (siehe auch `disp` und `sprintf`).

2. Fertigen Sie für jede Funktion drei Graphen an in denen Sie die drei Verfahren vergleichen. Tragen Sie im ersten den Fehler $x_n - \bar{x}$ und im zweiten das Residuum $|f(x_n)|$ über n an. Hierbei ist $\bar{x}$ die Nullstelle der jeweiligen Funktion. Verwende Sie geeignete Skalen (siehe auch `plot`, `semilogx`, `semilogy` und `loglog`).

Übungsaufgabe für die Tutorien:

Aufgabe 1:
Schreiben Sie einen Algorithmus für ein Trisektionsverfahren. Diskutieren Sie die Konvergenzgeschwindigkeit und Konvergenzordnung im Vergleich zum Bisketionsverfahren.

Aufgabe 2:
Verwenden Sie das Newton-Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstellen $\bar{x}$ der folgenden Funktionen

(a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ mit $x_0 = 2$

(b) $f(x) = x^3 - x$ mit $x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: Für $f(x) = \sin(x)$ existiert ein Startwert $x_0 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, so dass das Newton-Verfahren zyklisch ist mit Periode 2.

Aufgabe 4:
Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration $x_{i+1} = \cos(x_i)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den einzigen Fixpunkt $\bar{x} = \cos(\bar{x})$ konvergiert.

Aufgabe 5:
Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische Matrix, d.h. alle Eigenwerte sind reell und $(x^*, \lambda^*) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ ist ein Eigenpaar mit $\|x^*\|_2 = 1$, genau dann wenn (x^*, λ^*) eine Nullstelle der Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} \lambda x - Ax \\ \frac{1}{2}\|x\|_2^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)$$

ist.

1. Geben Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung von (x^*, λ^*) an.
2. Sei (x^*, λ^*) ein Eigenpaar, sodass λ^* die Vielfachheit 1 hat. Zeigen Sie, dass $Df(x^*, \lambda^*)$ regulär ist.