

## Numerische Mathematik I

### 7. Übungsblatt: Lineare Ausgleichsprobleme, QR-Zerlegung

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 12. Dezember 2012)

**Aufgabe 1:**

(7 Punkte)

1. Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix  $A = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 0 & 20 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$  mittels Housholder-Transformationen.
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der QR-Zerlegung die Bestapproximation des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 9x - 6y &= 300, \\ 20y &= 900, \\ 12x - 8y &= 600. \end{aligned}$$

**Aufgabe 2:**

(7 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Daten

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Bestimmen Sie das quadratische Polynom  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  welches die Summe des Fehlers

$$\sum_{i=0}^3 (p(x_i) - y_i)^2$$

minimiert. Lösen Sie dazu die zugehörige Normalgleichung mittels einer Cholesky-Zerlegung der auftretenden Matrix.

**Aufgabe 3:**

(6 Punkte)

Gegeben seien  $n$  linear unabhängige Vektoren  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ . Betrachten Sie das klassische und das numerisch stabilere modifizierte Verfahren von Gram-Schmidt zur Erzeugung von  $n$  orthonormalen Vektoren  $q_1, \dots, q_n$ , die den selben Raum aufspannen wie  $a_1, \dots, a_n$ :

**Klassisches Gram-Schmidt**

**Modifiziertes Gram-Schmidt**

```

for  $k = 1, \dots, n$  do
     $z_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} q_i (q_i^T a_k)$ 
     $q_k = z_k / \|z_k\|_2$ 
end for
    
```

```

 $a_k^{(1)} = a_k, k = 1, \dots, n$ 
for  $k = 1, \dots, n$  do
     $q_k = a_k^{(k)} / \|a_k^{(k)}\|_2$ 
    for  $l = k + 1, \dots, n$  do
         $a_l^{(k+1)} = a_l^{(k)} - (q_k^T a_l^{(k)}) q_k$ 
    end for
end for
    
```

1. Zeigen Sie, dass beide Verfahren die gleichen Vektoren  $q_k$  liefern.
2. Zeigen Sie, dass man diese Verfahren als QR-Zerlegung  $A = QR$ , angewendet auf die Spalten von  $A = [a_1, \dots, a_n]$  interpretieren kann. Dabei ist  $Q \in \mathbb{R}^{m,n}$  eine Matrix mit orthonormalen Spalten und  $R \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine obere Dreiecksmatrix. Geben Sie  $Q$  und  $R$  explizit an.

**Programmieraufgabe 7:** (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 14. Dezember 2012)

In dieser Programmieraufgabe soll die QR-Zerlegung mittels Householder-Transformationen programmiert werden. Dabei soll die Matrix  $Q$  nicht explizit gespeichert werden, sondern die Householdervektoren/Elementarreflektoren sollen in den frei werdenden Nullen unterhalb von  $R$  gespeichert werden. Diese QR-Zerlegung soll dann zum Lösen von linearen Ausgleichsproblemen benutzt werden. Die Vorgehensweise ist detailliert in den Folien aus der Übung erläutert. Bitte laden Sie auch das entsprechende Zip-Archiv von der Webseite des Kurses herunter. Sie können die Datei TEST.m aufrufen um die Funktionstüchtigkeit der einzelnen Funktionen der Reihe nach überprüfen zu lassen. Gehen Sie beim Programmieren am besten in der Reihenfolge vor, wie unten angegeben (entspricht der Reihenfolge auf den Folien):

```
function [beta, v] = house(x)
function Y = h_anwenden(v, beta, X)
function [QR, betas] = qr_zerlegung(A)
function Y = q_anwenden(QR, betas, X, transponiert)
function [x, res] = ausgleichsproblem(A, b)
```

Für die Abnahme ist es erforderlich, dass die Dateien TEST.m, RUNME.m und POLYFIT.m fehlerfrei durchlaufen. RUNME.m und POLYFIT.m müssen außerdem einen Ausgabe ähnlich der in Abbildung 1 produzieren.

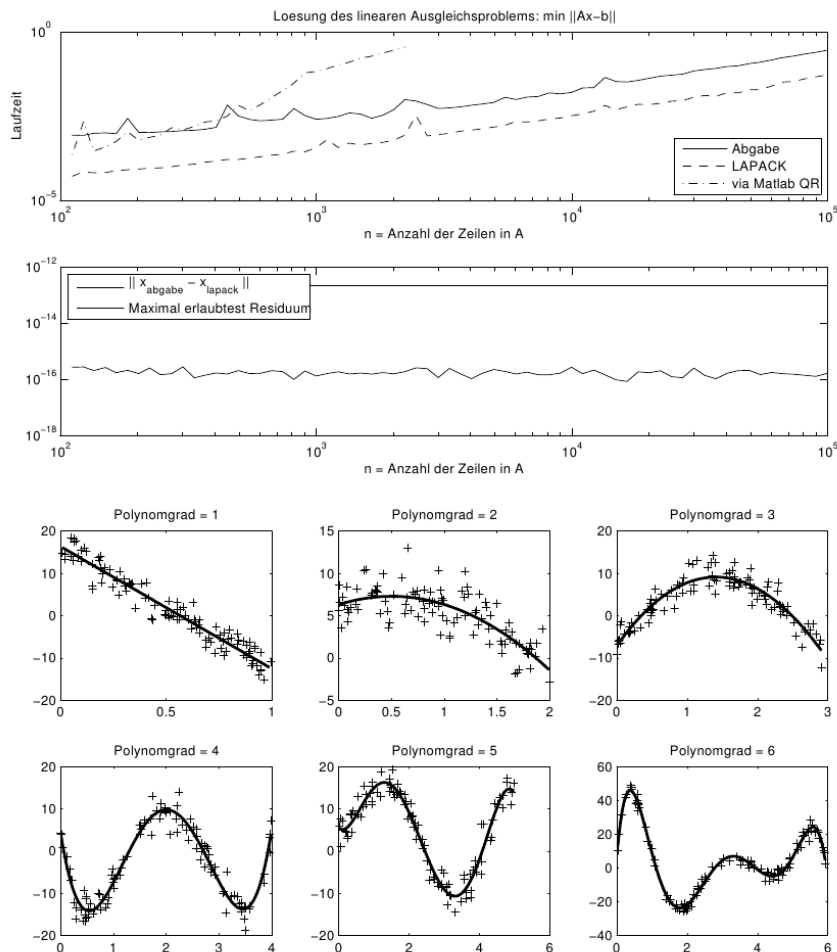


Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgabe von RUNME.m (oben) und POLYFIT.m (unten).

## Übungsaufgabe für die Tutorien:

### Aufgabe 1:

Sei  $U \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass  $U$  als Produkt von Householdermatrizen geschrieben werden kann.

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass eine orthogonale obere Dreiecksmatrix eine Diagonalmatrix ist.

### Aufgabe 2:

Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von  $A$  und lösen Sie damit das lineare Ausgleichsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2.$$

### Aufgabe 3:

Gegeben seien die folgenden Messwerte

$x_i$	1	2	3	5
$y_i$	110	103	91	70

Die gegebene Werte sollen durch die Funktion

$$g(x, a, b) = ae^{bx}$$

approximiert werden.

1. Stellen Sie das lineare Ausgleichsproblem auf, welches im ersten Schritt des Gauß-Newton Verfahrens gelöst werden soll. Benutzen Sie die Startwerte  $a_0 = 10$  und  $b_0 = -1$ .
2. Benutzen Sie den natürlichen Logarithmus um das Problem in ein ähnliches lineares Ausgleichsproblem umzuschreiben.

### Aufgabe 4:

Es seien folgende Messwerte  $(x_i, y_i, z_i)$  gegeben:

$$(1, 1, 3), \quad (1, 3, 1), \quad (3, 1, 3), \quad (3, 3, 3).$$

Formulieren Sie ein lineares Ausgleichsproblem zur Bestimmung der Ausgleichsebene

$$z = a + bx + cy$$

und berechnen Sie dessen Lösung mit Hilfe der Normalengleichung.