Technische Universität Berlin
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Lena Scholz

Wintersemester 20012/2013

Numerische Mathematik I

8. Übungsblatt: Polynominterpolation

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 19. Dezember 2012)

Aufgabe 1: **(5 Punkte)**

1. Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	1	2	4	-1	3
f_i	-3	1	2	7	-1	6

   für x_0, x_1, x_2, x_3 mit Hilfe der Lagrange-Darstellung und mit Hilfe der Newton-Darstellung.

2. Berechnen Sie zusätzlich die Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms wenn man die Stützstellen x_4 und x_5 mit hinzunimmt.

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**
Gegeben seien paarweise verschieden Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$. Zeigen Sie, dass folgende Mengen eine Basis der Polynome vom Grade höchstens n sind. Formulieren Sie die Interpolationsaufgabe

$$p(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

als lineares Gleichungssystem in den Koeffizienten des interpolierenden Polynoms in der jeweiligen Basis und berechnen Sie explizit die Matrix.

1. Monome $\mathcal{M} = \{x^0, x^1, \ldots, x^n\}$,
2. Lagrangepolynome $\mathcal{L} = \{L_i \,|\, i = 0, \ldots, n\}$ mit $L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \quad i = 0, \ldots, n,$
3. Newton Grundpolynome $\mathcal{N} = \{N_i \,|\, i = 0, \ldots, n\}$

$$N_0(x) = 1, \quad N_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**

1. Sei die unendlich oft stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben, wobei ein M existiere, so dass für die Ableitungen $\sup_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)| \leq M$ für alle $k = 0, 1, \ldots$ gelte. Weiterhin sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Stützstellen

$$a \leq x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leq b$$

   gegeben. Bezeichne mit P_n das Polynom vom Grade höchstens n, das f an den Stellen $x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ interpoliert. Konvergiert P_n für $n \to \infty$ (ohne weitere Voraussetzung über die Lage der Stützstellen) gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen f?

2. Existiert eine unendlich oft stetig differenzierbare Funtion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$ und beschränktem Träger, so dass ein M existiert mit $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| \leq M$ für alle $k = 0, 1, \ldots$?

Aufgabe 4: **(5 Punkte)**
Sei $p(x)$ ein Polynom dritten Grades, das die Funktion $f(x) = \frac{1}{a^2-x}$ in den Stützstellen $\{-4, -3, -2, -1\}$ interpoliert. Bestimmen Sie alle Werte von a, so dass

$$|f(x) - p(x)| \leq 10^{-5} \qquad \text{für alle } x \in [-4, -1].$$

Programmieraufgabe 8: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 21. Dezember 2012)

Bestimmen Sie mit dem Newtonschema die Interpolationspolynome p zu den Funktionen $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ und $g(x) = \sqrt{|x|}$. Verwenden Sie hierzu als Stützstellen jeweils

i) $x_i = -1 + ih,\ i = 0, \ldots, n; \quad h = \dfrac{2}{n},$

ii) $x_i = \cos \dfrac{(2i+1)\pi}{2(n+1)},\ i = 0, \ldots, n,$

für $n = 2, 4, 6, \ldots, 20$. Werten Sie das Polynom an den Stellen $y_j^i = x_i + j\frac{x_{i+1}-x_i}{21},\ j = 1, \ldots, 20$ aus. Vergleichen Sie als Schätzung für den maximalen Fehler $\|p - f\|_{\infty\ [-1,1]}$

$$\max_{i \in \{0,\ldots,n-1\}, j \in \{1,\ldots,20\}} |p(y_j^i) - f(y_j^i)|.$$

Plotten Sie die Interpolationspolynome zu den Stützstellen in i), ii) für $n = 20$. Erläuteren Sie die Ergebnisse.
Bemerkung: Auf der Homepage sind zu dieser Aufgabe bereits mehrere MATLAB-Files bereitgestellt, das Haupt-File (`script.m`) sowie die Funktionen (`FUNKTION?.m`). Zu erarbeiten sind die Files `AUSW.m` und `DIVDIFF.m` welche bereits als Maske zur Verfügung stehen und nur zu ergänzen sind. Die Kommentare in diesen Files geben weitere Informationen über die Vorgehensweise.

Übungsaufgabe für die Tutorien:

Aufgabe 1:
Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu den Stützstellen

a)

x_i	-3	-1	2
f_i	10	-6	15

b)

x_i	-1	0	2
f_i	-3	4	6

einmal mit Hilfe der Lagrange-Basis Funktionen und einmal mit der Methode von Newton.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ und für die dividierten Differenzen einer m mal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{h \to 0} f[x, x+h, \ldots, x+mh] = \frac{1}{m!} f^{(m)}(x).$$

Aufgabe 3:
Berechnen Sie das eindeutige Polynom $p \in \Pi_4$ welches die Bedingungen

1. $p(1) = 1,\ p'(1) = 2,\ p''(1) = 4,\ p(3) = 5.$
2. $p(-1) = -3,\ p(0) = 1,\ p'(0) = -5,\ p''(0) = 8,\ p(2) = 15,\ p'(2) = -1,\ p''(2) = 4.$

genügt.

Aufgabe 4:
Es seien $L_i(x),\ i = 0, \ldots, n$ die Lagrange-Basispolynome zu gegebenen Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$. Zeigen Sie, dass $\sum_{j=0}^{n} L_j(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.