Technische Universität Berlin **Wintersemester 20012/2013**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Lena Scholz

Numerische Mathematik I

9. Übungsblatt: Spline-Interpolation, Quadratur

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 9. Januar 2013)

Aufgabe 1: **(6 Punkte)**
Bestimmen Sie den interpolierenden quadratischen Spline $s \in S_{\Delta,2}$ mit den periodischen Randbedingungen $s'(a) = s'(b)$ zu den folgenden Stützpunkten:

x_i	0	1	$\frac{4}{3}$	2
f_i	0	1	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 2: **(8 Punkte)**
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Sei F Stammfunktion zu f, d.h. $F' = f$. Seien $x, h \in \mathbb{R}$ mit $[x-h, x+h] \subseteq [a,b]$. Zeige:

$$F(x+\frac{h}{2}) - F(x-\frac{h}{2}) = hf(x) + \frac{h^3}{24}\frac{f''(\theta_+) + f''(\theta_-)}{2}$$

für geeignet zu wählende $\theta_+, \theta_- \in [a,b]$.

(b) Sei $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\theta_1, \dots, \theta_l \in [a,b]$. Dann existiert ein $\theta \in [a,b]$, so dass

$$f''(\theta) = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l} f''(\theta_k).$$

(c) Sei $z_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$, $\quad h = \frac{b-a}{N}$. Dann gilt

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} f(t)\, dt - hf\left(\frac{z_i + z_{i+1}}{2}\right) = \frac{h^3}{24} f''(\theta_i)$$

für ein geeignetes $\theta_i \in [a,b], i = 0, \dots, N-1$.

(d) Sei $M(h) = h\sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{z_i+z_{i+1}}{2}\right)$ (Summierte Mittelpunktsregel). Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\, dt - M(h) = (b-a)\frac{h^2}{24} f''(\theta),$$

wobei $\theta \in [a,b]$ geeignet zu wählen ist.

Aufgabe 3: **(6 Punkte)**
Bestimmen Sie a, b, x und y, so dass die Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} g(t)\, \mathrm{d}t \approx a\, g(x) + b\, g(y)$$

für alle Polynome dritten Grades exakt ist.

Programmieraufgabe 9: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 11. Januar 2013)
Es soll die kubische Spline-Interpolation mit natürlichen Randbedingungen programmiert werden. Dazu sollen zwei Funktionen

```
function spline = berechne_spline(x, f)
function yy = spline_auswerten(spline, xx)
```

geschrieben werden. Die erste Funktion `berechne_spline` soll für die gegebenen Stützstellen (x_k, f_k), welche in den Vektoren `x` und `f` gespeichert sind, den interpolierenden kubisches Spline mit natürlichen Randbedingungen ausrechnen. Dabei sollen die Koeffizienten a_k, b_k, c_k, d_k des Splines und die Stützstellen x_k als Spaltenvektoren in den Feldern der Struktur `spline` gespeichert werden:

`spline.a,` `spline.b,` `spline.c,` `spline.d,` `spline.x`

Die Funktion `spline_auswerten` soll dann die Ergebnisse aus der Struktur `spline` nutzen, um damit den natürlichen Spline an den Zwischenstellen, welche in dem Vektor `xx` gegeben sind, auszuwerten. Dabei kann davon ausgegangen werden, dass die Vektoren `x` und `xx` stets aufsteigend sortiert sind.
Für die Abnahme ist es erforderlich, dass die Datei `RUNME.m` und `SPLINEPLAY.m` fehlerfrei laufen und einen Output ähnlich der Abbildung 1 produzieren.

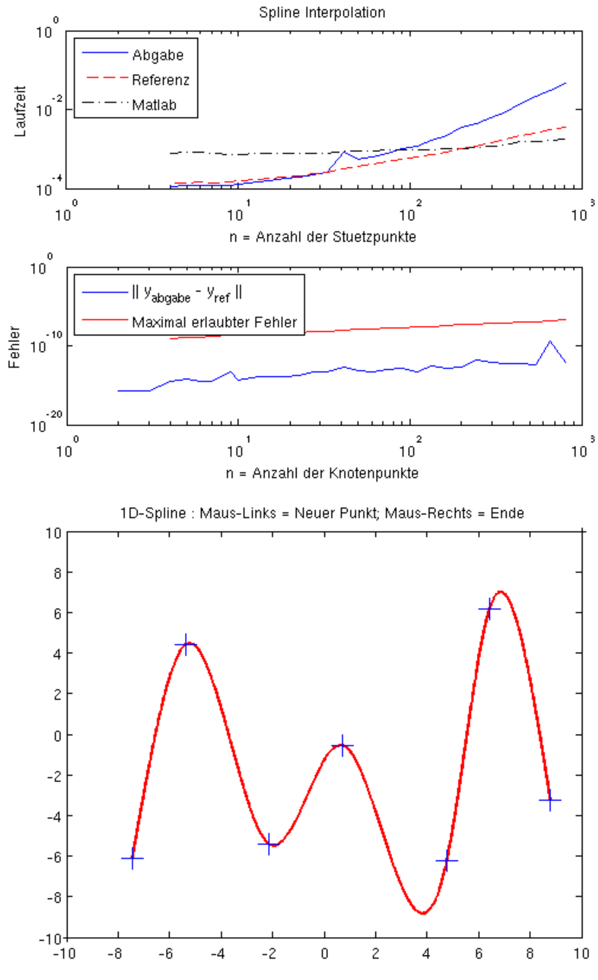

Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgabe von RUNME und SPLINEPLAY

Übungsaufgabe für die Tutorien:

Aufgabe 1:
Geben Sie eine Basis der linearen Splines an.

Aufgabe 2:
Es sei $\Delta = \{0, 1, 2\}$. Bestimmen Sie den kubischen interpolierenden Spline $s \in S_{\Delta,3}$ für die Funktion $f(x) := x^3$

a) mit natürlichen Randbedingungen,

b) mit den Randbedingungen $s''(x_0) = f''(x_0)$ und $s''(x_2) = f''(x_2)$.

Aufgabe 3:
Bestimmen sie die Parameter α, β und x, y so dass die Quadraturformeln

a) $Q_0^1(f) := \alpha f(0) + \beta f'(y)$ auf dem Interval $[0, 1]$

b) $Q_{-1}^1(f) := \alpha(f(x) + f(-x)) + \beta f'(y)$ auf dem Interval $[-1, 1]$

möglichst hohen Exaktheitsgrad haben. Bestimmen Sie den maximalen Exaktheitsgrad.