

Numerische Mathematik I  
10. Übungsblatt: Quadratur

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 16. Januar 2013)

**Aufgabe 1:** (6 Punkte)

- (a) Man bestimme die Gauß-Quadratur-Formel mit zwei Stützstellen für das Intervall  $[-1, 1]$  und die Gewichtsfunktion  $\omega(x) := 1 - x^2$ .
- (b) Man benutze diese Quadratur-Formel um die Funktion  $f(x) := e^x$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$  zu integrieren.

**Aufgabe 2:** (8 Punkte)

- (a) Entwickeln Sie zur näherungsweisen Berechnung von

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

eine Kubaturformel, die auf der zweimaligen Anwendung der Simpsonregel beruht.

- (b) Wie sieht bei Unterteilung von  $[a, b]$  und  $[c, d]$  in jeweils 2 Intervalle (also  $[a, \frac{a+b}{2}]$  und  $[\frac{a+b}{2}, b]$  bzw.  $[c, \frac{c+d}{2}]$  und  $[\frac{c+d}{2}, d]$ ) die entsprechende zusammengesetzte Formel aus?
- (c) Geben Sie eine Fehlerabschätzung für die Kubaturformel aus Teil (a) an. Dabei sei  $f$  als hinreichend oft stetig differenzierbar vorausgesetzt. Berechnen Sie mittels der Fehlerabschätzung

$$\int_1^3 \int_0^1 (xy - 1)^3 \, dx \, dy.$$

**Aufgabe 3:** (6 Punkte)

Bei der Rombergintegration werden zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(t) \, dt$$

die Trapezsummen  $\mathcal{T}(h_j)$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) zu den Schrittweiten

$$h_j = (b - a)/2^j \quad j = 0, 1, \dots$$

(Rombergfolge) auf  $h = 0$  extrapoliert. Mit  $P_{k, \dots, k+m}$  wird das interpolierende Polynom zu den Stützstellen  $h_k^2, \dots, h_{k+m}^2$  bezeichnet:

$$P_{k, \dots, k+m}(h_j^2) = \mathcal{T}(h_j), \quad \text{für } k \leq j \leq k + m$$

und der Wert des Polynoms bei 0 mit  $T_{k, \dots, k+m} = P_{k, \dots, k+m}(0)$ .

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Schemas von Neville-Aitken eine Rekursionsbeziehung für  $T_{k, \dots, k+m}$ .
- (b) Zeigen Sie, dass der Wert  $T_{0,1}$  der Simpsonregel entspricht.

**Programmieraufgabe 10:** (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 18. Januar 2013)

Schreiben Sie Matlab-Routinen

```
function w = TRAPEZ(f,a,b,N)
function w = MITTELP(f,a,b,N)
function w = SIMPSON(f,a,b,N)
function w = EXTRAPOL(f,a,b,k)
```

zur näherungsweisen Berechnung des Integrals  $\int_a^b f(x)dx$  mit Hilfe

- a) der summierten Trapezregel für  $N = 1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^9$  und folgender Unterteilung:

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

- b) der summierten Mittelpunktregel für  $N = 1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^9$  und der Unterteilung aus a).

- c) der summierten Simpsonregel für  $N = 2, 4, 8, 16, \dots, 2^9$  und der Unterteilung aus a).

- d) des Extrapolationsverfahrens zur summierten Trapezregel für  $k = 0, 1, 2, \dots, 9$  mit der Rombergfolge

$$h_l = \frac{b-a}{2^{l+1}}, \quad l = 0, \dots, k.$$

Vergleiche die Verfahren bezüglich Genauigkeit und Rechenaufwand zur Berechnung der folgenden Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx, \quad \int_0^1 \sqrt{x} \, dx, \quad \int_0^1 x\sqrt{x} \, dx, \quad \int_0^1 x^2\sqrt{x} \, dx$$

Hierzu sind auf der Homepage bereits ein Hauptfile `runme.m`, sowie die Routinen `FUNKTION*.m` zur Berechnung des Integranden der einzelnen Integrale vorhanden. Die Deklaration der Routinen `TRAPEZ.m`, `MITTELP.m`, `SIMPSON.m` und `EXTRAPOL.m` sind als Maske ebenfalls schon definiert und müssen nur noch vervollständigt werden.

## Übungsaufgabe für die Tutorien:

### Aufgabe 1:

- (a) Man bestimme die Gauß-Quadratur-Formel mit zwei Stützstellen für das Intervall  $[-1, 1]$  und die Gewichtsfunktion  $\omega(x) := x^2$ .
- (b) Man benutze diese Quadratur-Formel um die Funktion  $f(x) := e^x$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$  zu integrieren.

### Aufgabe 2:

Zu einer Unterteilung  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  bezeichne  $Q_a^b(f) = (b-a) \sum_{k=0}^n \gamma_k f(x_k)$  eine Quadraturformel. Zeigen Sie, dass der Genauigkeitsgrad  $\leq 2n + 1$  ist.

### Aufgabe 3:

Gegeben sei  $\Delta : a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ . Zeigen Sie: es gibt eindeutig bestimmte Zahlen  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  mit

$$\sum_{k=0}^n a_k p(x_k) = \int_a^b p(x) dx$$

für alle  $p \in \Pi_n$ .

### Aufgabe 4:

Zu einer gegebenen stetigen Funktion  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  betrachte man folgende Quadraturformel

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Zeigen Sie: Die Formel ist für Polynome vom Grade höchstens 3 exakt.