Technische Universität Berlin **Wintersemester 20012/2013**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Lena Scholz

Numerische Mathematik I

12. Übungsblatt: Implizite Einschrittverfahren

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 30. Januar 2013)

Aufgabe 1: **(6 Punkte)**

Bestimmen Sie $\gamma > 0$, so dass das implizite Verfahren welches durch die Butcher-Tabelle

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

gegeben ist mindestens die Konsistenzordnung 3 hat.

Aufgabe 2: **(8 Punkte)**

Es sei ein s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren gegeben durch die Butcher-Tabelle

$$\begin{array}{c|c} b & A \\ \hline & c^T \end{array}$$

mit $b, c \in \mathbb{R}^s$, $A \in \mathbb{R}^{s,s}$.

1. Man betrachte das skalare Anfangswertproblem der Form
$$y'(t) = p(t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{1}$$
wobei $p \in \Pi_{2s-1}$ ein Polynom vom Grad $\leq 2s-1$ ist. Wie kann man die Koeffizienten A, b, c wählen, damit das entsprechende Runge-Kutta-Verfahren angewendet auf (1) den ersten Schritt (und somit auch alle folgenden Schritte) exakt ausführt.

2. Setze
$$R(h) = 1 + hc^T(I - hA)^{-1}e,$$
mit $e = [1 \dots 1]^T$, wobei die Invertierbarkeit von $(I - hA)$ vorausgesetzt wird. Zeigen Sie mit Hilfe des skalaren Anfangswertproblems
$$y'(t) = y(t),$$
$$y(0) = 1,$$
dass
$$(R(h) - e^h) \in \mathcal{O}(h^{p+1}) \tag{2}$$
eine notwendige Bedingung dafür ist, dass das Verfahren die Konsistenzordnung p hat.

3. Zeigen Sie, dass die Bedingung (2) nicht hinreichend ist.

Hinweis: Benutzen Sie, dass im betrachteten Fall die Stufenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens k_i eindimensional sind und bilden Sie den Vektor

$$k := \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix}$$

Benutzen Sie außerdem die Notation

$$A := \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \end{bmatrix}$$

d.h. a_i bezeichne die i-te Zeile von A.

Aufgabe 3: **(6 Punkte)**

Das implizite Eulerverfahren zur Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0$ auf dem Intervall $[t_0, t_e]$ ist durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} u_0 &= y_0 \\ u_{k+1} &= u_k + hf(t_{k+1}, u_{k+1}), \quad k = 0, \ldots, N-1 \end{aligned} \tag{3}$$

gegeben, wobei $h = (t_e - t_0)/N$ gilt. Man betrachte die Differentialgleichung

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1 \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$$

für $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und die numerischen Lösungen durch das explizite $(u_k^{(e)})$, das modifizierte $(u_k^{(m)})$ und das implizite Eulerverfahren $(u_k^{(i)})$. Bestimmen Sie für jedes Verfahren Bedingungen an $z := h\lambda$, so dass

$$|u_{k+1}| \leq |u_k|, \quad k \geq 0$$

gilt. Skizzieren Sie die entsprechenden Bereiche in der komplexen Ebene.

Programmieraufgabe 12: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 1. Februar 2013)
Programmieren Sie das mehrstufige implizite Runge-Kutta-Verfahren

```
function y = implRungeKutta(method, func, diff, time_steps, y0)
```

welches das durch `method` spezifizierte implizite Runge-Kutta-Verfahren benutzt, um das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y0 \in \mathbb{R}^n$$

zu lösen. Nähere Informationen findet man in der Datei `implRungeKutta.m` im vorgegebenen Zip-Archiv. Dabei ist die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch `f=feval(func,t,y)` auszuwerten, wobei `t` ein Skalar und `y,f`$\in \mathbb{R}^n$ Vektoren sind. Analog kann man durch den Übergabewert `diff` die Ableitung von f auswerten. Die $N+1$ Elemente des Zeilenvektors `time_steps`$= [t_0, \ldots, t_N]$ geben das diskrete Zeitgitter an, bezüglich welchen das Runge-Kutta-Verfahren ausgeführt werden soll. Der Rückgabewert `y` $\in \mathbb{R}^{n,N+1}$ soll am Ende in jeder Spalte die berechnete Approximation zum Zeitpunkt t_i enthalten. Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems $\mathcal{F}(K) = 0$ welches in jedem Zeitschritt für die Stufenwerte $K = [K_1, \ldots, K_s]^T \in \mathbb{R}^{s \cdot n}$ zu lösen ist, soll das Newton-Verfahren verwendet werden. Hierbei soll die Newton-Iteration abgebrochen werden, falls

$$\|K^{(i+1)} - K^{(i)}\| + \|\mathcal{F}(K^{(i)})\| <= TOL$$

mit der Toleranze `TOL`$= 10^{-5}$ gilt, oder falls die Anzahl der Itarationschritte `MAXIT`$= 1000$ übersteigt. Als Startwert für die Newton-Iteration wähle man $K^{(0)} = 0 \in \mathbb{R}^{n \cdot s}$.
Testen Sie Ihr Program indem sie der Reihe nach die Befehle

```
>> N_BODY_PROBLEM('nbp_1.mat')
>> N_BODY_PROBLEM('nbp_2.mat')
>> N_BODY_PROBLEM('nbp_3.mat')
>> N_BODY_PROBLEM('nbp_sonne_erde_mond.mat')
```

aus der Matlab Konsole ausführen.

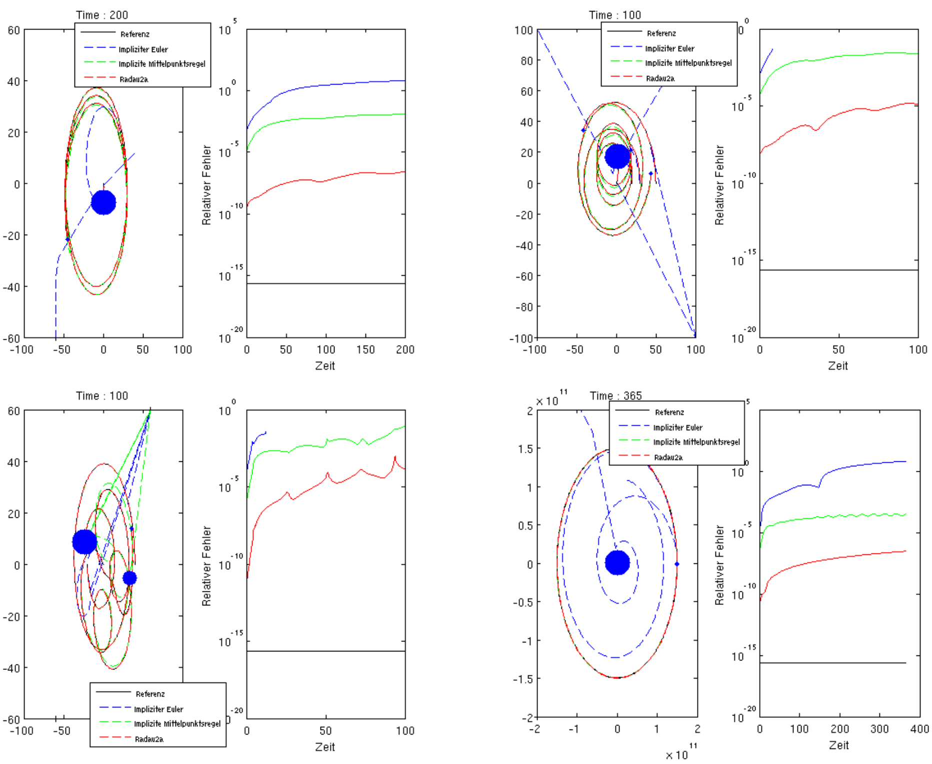

Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgaben von N_BODY_PROBLEM.m

Übungsaufgabe für die Tutorien:

Aufgabe 1:
Es seien $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbare Funktionen und $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für die Funktion $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\tau(h) := y(t+h) - y(t) - h \cdot \Phi(h)$$

gilt

$$\tau^{(k)}(0) = y^{(k)}(t) - k \cdot \Phi^{(k-1)}(0) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass die *3/8-Regel*, welche durch die Butcher-Tabelle

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$$

gegeben ist, die Konsistenzordnung $p = 3$ hat.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie alle $c_1, c_2 > 0$, so dass das implizite Runge-Kutta-Verfahren, welches durch die Butcher-Tabelle

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & c_1 & 0 \\ c_2 & 0 & c_2 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

gegeben ist, die Konsistenzordnung 2 hat.

Aufgabe 4:
Die Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ soll numerisch integriert werden, d.h. es soll der Wert $\int_a^b g(t)dt$ approximiert werden. Formulieren Sie das Problem als Anfangswertproblem und wenden Sie einmal das explizite und einmal das implizite Euler-Verfahren zur Lösung an.