

Numerische Mathematik I

13. Übungsblatt: Mehrschrittverfahren

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 6. Februar 2013)

Aufgabe 1:

(6 Punkte)

Bestimmen Sie $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass das Mehrschrittverfahren

$$u_{k+3} + \gamma(u_{k+2} - u_{k+1}) - u_k = h \frac{3 + \gamma}{2} (f(t_{k+2}, u_{k+2}) + f(t_{k+1}, u_{k+1}))$$

die maximale Konsistenzordnung besitzt. Ist das Verfahren für dieses feste γ nullstabil?

Aufgabe 2:

(7 Punkte)

Bestimmen Sie die Koeffizienten des 2-schrittigen Adams-Moulton-Verfahrens.

Aufgabe 3:

(7 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jede Zahl $m \in \mathbb{N}$ (bis auf Normierung) genau ein lineares m -Schriftverfahren

$$\sum_{j=0}^m a_j u_{l+j} = h \sum_{j=0}^m b_j f(t_{l+j}, u_{l+j})$$

mit der Konsistenzordnung $2m$ existiert, aber keines mit der Konsistenzordnung $2m + 1$.

(*Hinweis:* Man betrachte das Konsistenzgleichungssystem für die Unbekannten a_j und $-b_j$ mit der Normierung $a_m = 1$.)

Programmieraufgabe 13: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 8. Februar 2013)

In dieser Programmieraufgabe soll das 3-schrittige Adams-Bashforth-Verfahren programmiert werden. Laden Sie das Zip-Archiv von der Webseite herunter und implementieren sie eine Funktion

```
function [t, y] = adams_bashforth(N, a, b, func, y0),
```

welche das 3-schrittige Adams-Bashforth-Verfahren implementiert um ein Anfangswertproblem der Form

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)) \quad \text{auf } t \in [a, b] \\ y(a) &= y_0\end{aligned}$$

auf einem äquidistantem Gitter $a = t_0 < \dots < t_N = b$ mit N Gitterpunkten zu lösen. Die Auswertung der rechten Seite erfolgt durch den Funktions-Handle `func`, der auf eine Funktion der Form

```
function f = func(t, y)
```

referenziert. Die Anlaufrechnung (zur Bestimmung der ersten beiden Approximationen $y_1 \approx y(t_1)$ und $y_2 \approx y(t_2)$) soll mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren, welches in der Programmieraufgabe 11 implementiert wurde, ausgeführt werden. Die Rückgabewerte der Funktion `adams_bashforth` sind die Vektoren $\mathbf{t} = [t_0, \dots, t_N]$ und $\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_N]$ der diskreten Zeitschritte und zugehörigen Approximationen. Für die Abnahme ist es erforderlich, dass die Aufrufe

```
>> RUNME
>> RUNME(true)
```

fehlerfrei druchlaufen und eine Ausgabe wie in Abbildung 1 erzeugen.

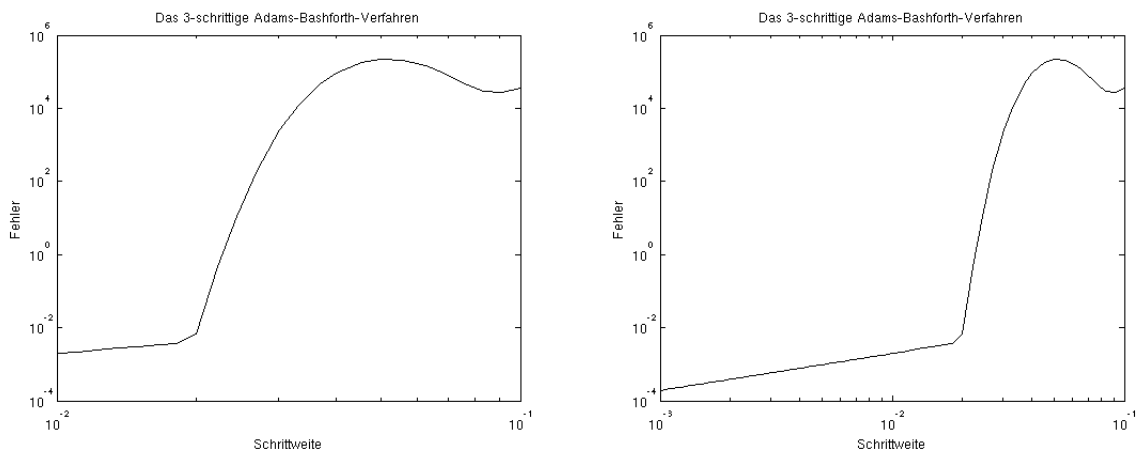


Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgaben von `RUNME` (links) und `RUNME(true)` (rechts)

Übungsaufgabe für die Tutorien:

Aufgabe 1:

Betrachten Sie das folgende Mehrschrittverfahren:

$$u_{k+2} - u_k = \frac{h}{3} (f(t_{k+2}, u_{k+2}) + 4f(t_{k+1}, u_{k+1}) + f(t_k, u_k))$$

- (a) Bestimmen Sie die maximale Konsistenzordnung des Verfahrens.
- (b) Untersuchen Sie das Verfahren auf Nullstabilität.

Aufgabe 2:

Sei $m \geq 2$. Sind die folgenden Mehrschrittverfahren nullstabil?

- (a) $u_{k+m} = u_{k+m-1} + h\Phi(f, t_k, u_k, \dots, u_{k+m}, h)$
- (b) $u_{k+m} = 2u_{k+m-1} - u_{k+m-2} + h\Phi(f, t_k, u_k, \dots, u_{k+m}, h)$
- (c) $u_{k+m} = u_{k+m-2} + h\Phi(f, t_k, u_k, \dots, u_{k+m}, h)$
- (d) $u_{k+m} = u_k + h\Phi(f, t_k, u_k, \dots, u_{k+m}, h)$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Koeffizienten des 3-schrittigen Adams-Bashforth-Verfahrens.