Technische Universität Berlin **Wintersemester 2012/2013**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Lena Scholz

Numerische Mathematik I

14. Übungsblatt: Absolute Stabilität von Mehrschrittverfahren

Hausaufgaben:
(Abgabe bis zum 13. Februar 2013 direkt beim Tutor oder Assistenten!)

Aufgabe 1: **(5 Punkte)**
Gegeben sei die Familie von Verfahren

$$u_{j+1} = u_j + h[\theta f(t_j, u_j) + (1-\theta) f(t_{j+1}, u_{j+1})] \quad \theta \in [0,1].$$

Bestimmen Sie die Menge aller θ, so dass die zugehörigen Verfahren absolut stabil sind.

Aufgabe 2: **(6 Punkte)**
Skizzieren Sie den Bereich absoluter Stabilität der folgenden Mehrschrittverfahren:

(a) $u_{m+2} = u_m + 2hf_{m+1}$

(b) $u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}[f_m + f_{m+1}]$

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**
Man bestimme für das implizite Runge-Kutta Verfahren, welches durch die Butchertabelle

$$\begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

gegeben ist, den Bereich absoluter Stabilität. Ist das Verfahren absolut stabil?

Aufgabe 4: **(4 Punkte)**
Zeigen Sie, dass das modifizierte Euler-Verfahren von Collatz und das Verfahren von Heun denselben Bereich absoluter Stabilität haben.

Übungsaufgabe für die Tutorien:

Aufgabe 1:
Betrachten Sie das explizite bzw. das implizite Eulerverfahren mit variabler Schrittweite h_j für die Differenzialgleichung $y' = \lambda(t)y$ auf dem Intervall $[0, a]$, wobei $\lambda(t) = \lambda t$ für ein festes negatives λ. Wie müssen die h_j gewählt werden, so dass $h_j\lambda(t)$ für alle j und $t \in [t_j, t_{j+1}]$ noch im Bereich absoluter Stabilität liegt. Kann man den Endpunkt a des Intervalls beliebig groß wählen?

Aufgabe 2:
Betrachten Sie die implizite Trapezregel $u_{j+2} = u_j + h(f_{j+2} + f_j)$ für die Differenzialgleichung $y' = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Berechnen und skizzieren Sie den Bereich absoluter Stabilität.

Aufgabe 3:
Stellen Sie fest, ob das implizite Runge-Kutta Verfahren, welches durch die Butchertabelle

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

gegeben ist, absolut stabil ist.