Technische Universität Berlin **Wintersemester 2012/2013**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Lena Scholz

Numerische Mathematik I

Wiederholungsblatt

Aufgabe 1:

1. Man unterziehe den Ausdruck
$$\frac{(1-x)-1}{x} \tag{1}$$
für $0 \neq x$ einer Fehleranalyse. Wird dieser Ausdruck gut funktionieren auf einer Maschine für betragsmäßig kleine/große $x \in \mathbb{R}$?

2. Man werte den Ausdruck (1) für die Zahl -0.018 aus; auf einer Maschine die mit den normalisierten Gleitpunktzahlen $F(10, 3, -\infty, \infty)$ rechnet.

3. Geben Sie einen zu (1) mathematisch äquivalenten Ausruck an, der besser für die Berechnung auf der Maschine geeignet ist und unterziehen Sie auch diesen Ausdruck einer Fehleranalyse.

Aufgabe 2:
Was ist die absolute und relative Kondition des Verfahrens, welches durch die Funktion $f : \mathbb{R}_* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(a,b) = \frac{b}{a}$ beschrieben ist bezüglich der $\|.\|_2$-Norm. Vereinfachen Sie die *relative* Kondition so weit wie möglich.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie eine Cholesky-Zerlegung der Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 9 & 9 & -6 & 0 \\ 9 & 18 & -6 & -12 \\ -6 & -6 & 5 & -3 \\ 0 & -12 & -3 & 34 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4:
Berechnen Sie eine Singulärwert-Zerlegung der Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5:

1. Geben Sie die Iterationsmatrix an, die man erhält wenn man das Einzelschritt-Verfahren auf die Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
anwendet.

2. Konvergiert das Einzelschritt-Verfahren für jeden Startwert x_0?

Aufgabe 6:
Man gebe die Orthogonal-Projektoren auf und entlang des Unterraumes

$$V = span\left(\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\right)$$

als Matrizen $P, Q \in \mathbb{R}^{3,3}$ explizit an.

Aufgabe 7:
Die folgenden Daten

i	1	2	3	4
x_i	1	$\sqrt{\pi}$	$\exp(3)$	-120
y_i	2	1	5	2

sollen durch eine konstante Funktion

$$f(x; a) := a$$

möglichst gut (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) beschrieben werden, d.h. es soll gelten $y_i \approx f(x_i; a)$. Geben Sie das entsprechende lineare Ausgleichsproblem an und lösen Sie es mit Hilfe einer QR-Zerlegung.

Aufgabe 8:
Geben Sie das eindeutige Interpolationspolynom $p \in \Pi_5$ vom Grad ≤ 5 an, welches die Funktion

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

in den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ interpoliert und die zusätzliche Bedingung $f'(x_0) = p'(x_0)$ erfüllt.

Aufgabe 9:
Bestimmen Sie die Parameter $\alpha, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ derart, dass die Quadraturformel

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \alpha f(x_1) + \alpha f(x_2),$$

möglichst hohen Exaktheitsgrad hat. Was ist der Exaktheitsgrad? Handelt es sich bei dem Ergebnis um eine Newton-Cotes-Quadratur Regel? Handelt es sich um eine Gauß-Quadratur Regel?

Aufgabe 10:
Geben Sie alle Runge-Kutta Verfahren der Form

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
b_2 & a_2 & & & & \\
b_3 & 0 & a_3 & & & \\
b_4 & 0 & 0 & a_4 & & \\
b_5 & 0 & 0 & 0 & a_5 & \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

an, die mindestens die Konsistenzordnung 2 haben.

Aufgabe 11:
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx \tag{2}$$

mittels der summierten Trapez-Regel mit `n` Teilintervallen approximiert. D.h. es soll eine Funktion

```
function I = compute_integral(n)
```

geschrieben werden, die die Anzahl der Teilintervalle `n` übergeben bekommt und die entsprechende Approximation `I` an (2) zurückgibt.

Aufgabe 12:
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $B \in \mathbb{R}^{k,\ell}$ übergeben bekommt, und damit die Matrix

$$C := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+k,m+\ell}$$

zurückgibt.

Aufgabe 13:
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche zwei Skalare $n, m \in \mathbb{N}$ übergeben bekommt, und damit die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m \cdot n - n + 1 & m \cdot n - n + 2 & \dots & m \cdot n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

zurückgibt.