Technische Universität Berlin WS 2012/13
Institut für Mathematik–AG Stochastik Ausgabe: 26. 11. 2012
Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel/Dr. Noemi Kurt Abgabe: 3. 12. 2012

6. Übung

Stochastische Modelle

Schriftliche Aufgaben:

Aufgabe 1 **(Schriftlich, 4 Punkte)**

Sei $E = \mathbb{Z}^2$, und $E' = \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2)^T$, d.h. das um 1/2 verschobene Gitter (siehe Skizze auf der Website). Wir betrachten die Matrizen

$$R = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad R^* = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Sei $\alpha = (\alpha_{x'})_{x' \in E'}$ mit $\alpha_{x'} \geq 0$ für $x' \in E'$ so gewählt, dass $\pi_x := \sum_{e:|e|=1} \alpha_{x+Re} > 0$ für alle $x \in E$ gilt. Setze $p_{x,y} = 0$ falls $|x - y| \neq 1$ und für $x \in \mathbb{Z}^2, |e| = 1$

$$p_{x,x+e} = \frac{\alpha_{x+Re}}{\pi_x}.$$

1. Zeigen Sie dass π ein invariantes Maßfür P ist. Unter welcher Bedingung gibt es eine invariante Verteilung?
2. Zeigen Sie, dass die Zeitumkehr von P gegeben ist durch $P^*_{x,x+e} = \frac{\alpha_{x+R^*e}}{\pi_x}$.
3. Bestimmen Sie die Periode von P.

Aufgabe 2 **(schriftlich, 4 Punkte)**

Es sei $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Galton-Watson Prozess mit Nachkommensverteilung $(p_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, d.h. die Wahrscheinlichkeit dass ein Individuum k Nachkommen hat ist p_k. Wir nehmen an, dass $p_0 > 0$ und $\sum_{k=0}^{\infty} k p_k > 1$ gelten. Es sei $S_0 = 1$. Definiere

$$T_0 := \inf\{n > 0 : S_n = 0\}.$$

Wir sagen dass $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ausstirbt, falls $T_0 < \infty$ ist. Sei $d := \mathbb{P}(T_0 < \infty)$ die Aussterbewahrscheinlichkeit. Weiter sei $G(z) := \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(S_1 = k)$ die erzeugende Funktion von S_1. Aus Vorlesung/Skript ist die Fixpunktgleichung $G(d) = d$ bekannt.

(a) Zeigen Sie $\mathbb{P}(T_0 < \infty \,|\, S_1 = k) = d^k$.

(b) Sei $r_k := \mathbb{P}(S_1 = k \,|\, T_0 < \infty), k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie $r_k = d^{k-1}\mathbb{P}(S_1 = k)$.

(c) Sei nun $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Galton-Watson Prozess mit Nachkommensverteilung $(r_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Zeigen Sie dass $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ fast sicher ausstirbt. (Die Ergebnisse aus Vorlesung/Skript dürfen dazu ohne Beweis verwendet werden).

Mündliche Aufgaben:

Aufgabe 3 (Metropolis-Algorithmus) **(mündlich)**

Sei π eine Verteilung auf E und Q eine vorgegebene Übergangsmatrix auf E. Wie in der Übungsstunde definieren wir P durch

$$p_{ij} = \begin{cases} q_{ij} \min\{1, \frac{\pi(j)q_{ji}}{\pi(i)q_{ij}}\} & \text{falls } i \neq j, q_{ij} > 0 \\ 0 & \text{falls } i \neq j, q_{ij} = 0 \\ 1 - \sum_{k \neq i} p_{ik} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie dass P eine stochastische Matrix und π eine invariante Verteilung für P ist.

(b) Falls Q irreduzibel ist und die Eigenschaft hat dass $q_{ij} > 0 \Leftrightarrow q_{ij} > 0$ für alle i, j gilt, und π nicht die Gleichverteilung ist, so ist P irreduzibel.

Aufgabe 4 (Galton-Watson Prozess) **(mündlich)**

Die Namensgeber Galton und Watson interessierten sich für den Erhalt von Familiennamen. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass jede Familie genau 3 Kinder hat, von denen jedes mit Wahrscheinlichkeit $q \in (0, 1)$ männlich ist. Im 19. Jahrhundert wurde der Familienname nur von männlichen Kindern weitergegeben. Wir starten mit einem männlichen Individuum zur Zeit $n = 0$. Geben Sie die Nachkommensvertelilung für den Galton-Watson-Prozess an, der die Anzahl Individuen mit dem betreffenden Familiennamen modelliert. Berechnen Sie für $q = 1/2$ die Wahrscheinlichkeit dass der Familienname ausstirbt.

Wichtig:

Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln oder in festen Zweiergruppen abgegeben werden. Abgabe am 3. 12. 2012 **vor** der Übungsstunde.

Die mündlichen Aufgaben müssen zur Präsentation in der Übungsstunde vorbereitet werden. Jede mündliche Aufgabe kann von maximal 8 Personen gewählt werden. Das Doodle wird am **Mittwoch 28. 11. 12** frei geschaltet.