Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
PROF. DR. JOCHEN BLATH
DR. MARCEL ORTGIESE

Wintersemester 2012/13
Ausgabe: 24. Januar 2012
Abgabe: 31. Januar 2012

Versicherungsmathematik: Übung 12

Aufgabe 1 **(5 Punkte)**

Die Beobachtungen $(x_1, \ldots, x_n)$ sollen unabhängige Realisierungen einer Poisson-verteilten Zufallsvariable mit unbekanntem Parameter λ sein. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für λ. Vergleichen Sie ihn mit dem Momentenschätzer.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Es sei $G_{\alpha,c}$ die Paretoverteilung mit Parametern $\alpha > 0$ und $c > 0$, d.h.

$$G_{\alpha,c}(x) = \begin{cases} 1 - (\frac{x}{c})^{-\alpha} & \text{für } x > c, \\ 0 & \text{für } x \leq c. \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie die Quantilfunktion $G_{\alpha,c}^{-1}$ von $G_{\alpha,c}$.

(ii) Es sei $F = G_{1,1}$ die Paretoverteilung mit Parametern $\alpha = 1, c = 1$. Anngenommen Sie beobachten Daten, deren empirische Verteilungsfunktion $F_n \approx G_{\alpha,c}$ ist für beliebige $\alpha, c > 0$. Um den Q-Q Plot zu erzeugen, haben Sie allerdings F als die richtige Verteilung "geraten", d.h. Sie plotten $G_{\alpha,c}^{-1}$ gegen F^{-1}. Den Graphen welcher Funktion erhalten Sie?

(iii) Wie müssen Sie die Funktion ℓ wählen, damit der Graph von $\ell(G_{\alpha,c}^{-1})$ gegen $\ell(F^{-1})$ einer Geraden entspricht. Wie können Sie die Parameter c und α ablesen?

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

Es sei F eine Verteilungsfunktion. Definiere als $F^{-1}(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}}\{F(x) \geq y\}$ die Quantilfunktion zu F. Zeigen Sie, dass für uniform verteiltes $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ die Verteilung von $F^{-1}(U)$ durch F gegeben ist. Dies ist also ein Verfahren, um Zufallszahlen jeder Verteilung zu generieren.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

Geben Sie ein Beispiel für eine Verteilungsfunktion F an, für die gilt

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{1 - F(x)}{e^{-\lambda x}} = 0 \quad \text{für alle } \lambda > 0,$$
$$\limsup_{x \to \infty} \frac{1 - F(x)}{e^{-\lambda x}} = \infty \quad \text{für alle } \lambda > 0.$$

[Hinweis: Sie könnten F von der Form $F(t) = f_k$ für $t \in [x_k, x_{k+1})$ betrachten und dann geeignetete f_k und x_k wählen.]