Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
PROF. DR. JOCHEN BLATH
DR. MARCEL ORTGIESE

Wintersemester 2012/13
Ausgabe: 31. Januar 2012
Abgabe: 7. Februar 2012

Versicherungsmathematik: Übung 13

Aufgabe 1 **(5 Punkte)**

Zeigen Sie, dass das Exponentialprinzip gegeben durch das Nullnutzenprinzip mit Nutzenfunktion $u(x) = \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta x})$ und Parameter $\beta > 0$ ein Prämienprinzip ist. Zeigen Sie, dass es für $\beta \to 0$ gegen das Nettorisikoprinzip konvergiert. Zeigen Sie außerdem, dass das Standardabweichungsprinzip translationsinvariant und homogen, aber nicht additiv ist.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Es sei $\delta > 0$ und

$$\mathcal{X}' = \{X : \mathbb{E}(X^2) < \infty, \mathbb{P}\{X > \mathbb{E}(X) + \delta\sqrt{\mathbb{E}[((X - \mathbb{E}(X))_+)^2]}\} > 0\},$$

dabei bezeichnet $f_+ = \max(f, 0)$ den Positivteil der Funktion f. Auf $\mathcal{X}'$ definieren wir das Semistandardabweichungsprinzip H gegeben durch

$$H(X) = \mathbb{E}(X) + \delta\sqrt{\mathbb{E}[((X - \mathbb{E}(X))_+)^2]}.$$

Zeigen Sie, dass es ein homogenes Prämienprinzip ist. Was ist der Vorteil dieses Prinzips gegenüber dem Standardabweichungsprinzip? Ist es additiv?

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

Bestimmen Sie zum Niveau $\lambda \in (0, 1)$ jeweils den V@R und den AV@R für das Risiko $X = -Z$. Dabei gelte:

1. Z ist Pareto-verteilt mit Parameter $\alpha > 1$ (also mit Verteilungsfunktion $F_Z(x) = 1 - x^{-\alpha}, x \geq 1$).
2. Z ist exponentialverteilt mit Parameter $\gamma > 0$.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

Es seien X, Y zwei reelle Zufallvariablen mit Verteilungsfunktionen P_X, P_Y. Wir sagen, X dominiert Y stochastisch, $X \geq_{st} Y$, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, dass $P_X(t) \leq P_Y(t)$.

a) Zeigen Sie, dass $\geq_{st}$ eine partielle Ordnung ist, also reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Ist $\geq_{st}$ auch eine Totalordnung, gilt also für je zwei Zufallsvariablen X, Y entweder $X \geq_{st} Y$ oder $Y \geq_{st} X$?

b) Zeigen Sie: Gilt $X \geq_{st} Y$, so gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sowie darauf definierte Zufallsvariablen $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$, die wie X bzw. Y verteilt sind und so dass

$$\mathbb{P}\left[\tilde{X} \geq \tilde{Y}\right] = 1.$$