Tutorium 10

Gauß-Quadratur

Ist $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ eine stetige Gewichtsfunktion, dann ist

$$\langle \cdot , \cdot \rangle_\omega : \Pi_n \times \Pi_n \to \mathbb{R}$$

$$\langle p, q \rangle_\omega := \int_a^b p(x)\, q(x)\, \omega(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum Π_n.

Da die Monome $1, x, \dots, x^n \in \Pi_n$ eine Basis von Π_n bilden erhält man durch Orthogonalisierung (d.h. z.B. mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens):

$$p_0(x) := 1$$

$$p_k(x) := x^k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle x^k, p_j \rangle_\omega}{\langle p_j, p_j \rangle_\omega} \cdot p_j(x) \quad , \; k = 1, \dots, n$$

eine Basis $\{p_0, \dots, p_n\}$ von Π_n mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $p_i \in \Pi_i$ mit Leitkoeffizient 1

(ii) $\langle p_i, p_j \rangle_\omega = \delta_{ij} \quad \forall i,j \in \{0, \dots, n\}$

(iii) p_i hat genau i paarweise verschiedene (d.h. einfache) Nullstellen in (a,b) und alle Nullstellen sind reell.
(gilt allgemein für Nullstellen orthogonaler Polynome)

(→ VL)

Beweis: Seien $a < x_1 < \dots < x_\ell < b$ die Nullstellen von p_i in (a,b) an denen p_i das Vorzeichen wechselt (d.h. reelle Nullst. ungerader Vielfachheit)

z.z: $\ell = i$

Annahme $\ell < i$, dann hat $q(x) := \prod_{j=1}^{\ell} (x - x_j)$ den Grad $\ell < i$.

Darstellung von $q(x)$ in den Basisvektoren $\{p_0, \dots, p_\ell\}$

$\Rightarrow \langle p_i, q \rangle = 0$.

Weiter gilt $\langle p_i, q \rangle = \int_a^b \underbrace{p_i(x) \cdot q(x)}_{\text{ändert auf } (a,b) \text{ das VZ nicht!}} \omega(x)\, dx \neq 0$ ↯ $\Rightarrow \ell = i$ ∎

Wählt man x_i $(i=1,\dots,n)$ als die Nullstellen des orthogonalen Polynoms $p_n(x)$ (orthogonal bzgl. der Gewichtsfunktion $\omega(x)$) und die Gewichte als

$$\omega_i = \int_a^b \omega(x) \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \, dx \quad , \; i = 1, \dots, n$$

so erhält man die Gauß-Quadraturformel

$$Q_a^b(f) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) \, \omega(x) \, dx$$

<u>Eigenschaften:</u>

(i) Gauß-Quadraturformeln haben maximalen Exaktheitsgrad $m = 2n-1$,

d.h. $\displaystyle\int_a^b p(x) \, \omega(x) \, dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, p(x_i) \quad \forall \, p \in \Pi_{2n-1}$

[Beweis → VL]

(ii) Alle Gewichte ω_i sind positiv.

<u>Bew:</u> $\displaystyle 0 < \int_a^b L_j^2(x) \, \omega(x) \, dx \overset{(i)}{=} \sum_{i=1}^{n} \omega_i L_j^2(x_i) = \omega_j \quad , \; j = 1, \dots, n$

L_j: j-tes Lagrange-Polynom $\quad L_j(x) = \displaystyle\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \in \Pi_{n-1}$

Aufg 1: 1) $[a,b]=[-1,1]$, $\omega(x)=x^2$, $n=2$

gesucht: Stützstellen x_i und Gewicht ω_i der Gauß-Quadratur.

$$P_0(x) = 1$$

$$\langle P_0, P_0\rangle_\omega = \int_{-1}^{1} 1\cdot 1\cdot x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\langle x, P_0\rangle_\omega = \int_{-1}^{1} 1\cdot x\cdot x^2\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad P_1(x) = x - \frac{0}{2/3}\cdot P_0 = x$$

$$\langle P_1, P_1\rangle_\omega = \int_{-1}^{1} x\cdot x\cdot x^2\,dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

$$\langle x^2, P_1\rangle_\omega = \int_{-1}^{1} x^2\cdot x\cdot x^2\,dx = \frac{1}{6}x^6\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle x^2, P_0\rangle_\omega = \int_{-1}^{1} x^2\cdot 1\cdot x^2\,dx = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \quad P_2(x) = x^2 - \frac{2/5}{2/3}\cdot P_0(x) - \frac{0}{2/5}\cdot P_1(x)$$

$$= x^2 - \frac{3}{5}$$

$P_2(x) = x^2 - \frac{3}{5}$ hat die Nullstellen $x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$

Damit ergeben sich die Gewichte zu

$$\omega_1 = \int_{-1}^{1} x^2\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\,dx = \frac{1}{2x_1}\int_{-1}^{1} x^2(x-x_2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2x_1}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3x_2\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2x_1}\left(-\frac{2}{3}x_2\right) = \frac{1}{3}$$

und

$$\omega_2 = \int_{-1}^{1} x^2\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{x^2(x-(-x_2))}{-(x_1-x_2)}\,dx = \frac{1}{-2x_1}\int_{-1}^{1} x^2(x+x_2)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2x_1}\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3x_2\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

2) Berechne Näherung an $\int_{-1}^{1} e^x \, dx$

$$Q_{-1}^{1}(f) = \sum_{i=1}^{2} \omega_i f(x_i) = \frac{1}{3}\left(f\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + f\left(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right)\right) \approx \int_{-1}^{1} f(x)\, \underline{\omega(x)}\, dx$$

D.h. hier $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} e^x \, dx = \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{x^2} \cdot x^2 \, dx \approx \frac{1}{3}\left(\frac{\exp\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + \exp\left(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right)}{3/5}\right.$$

$$= \frac{5}{9}\left(\exp\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + \exp\left(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right)\right.$$

Aufg 2: Sei $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$, $Q_a^b(f) := (b-a)\sum_{k=0}^{n} \gamma_k f(x_k)$

z.z.: Der Genauigkeitsgrad ist $\le 2n+1$.

D.h. z.z.: $\exists\, p \in \Pi_{2n+2}$ so dass $Q_a^b(p) \neq \int_a^b p(x)\,dx$.

Beweis:

Sei $p(x) := \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$

d.h. $p \in \Pi_{2(n+1)}$ und $p(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$

Dann gilt:

$$Q_a^b(p) = (b-a) \sum_{k=0}^{n} \gamma_k\, p(x_k) = 0$$

und

$$\int_a^b p(x)\,dx > 0$$

$\boxtimes$

Aufg 3: Sei $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$ und

z.z.: $\exists$ eindeutig bestimmt $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, p(x_k) = \int_a^b p(x)\,dx \qquad \text{für alle } p \in \Pi_n.$$

Beweis:

Betrachte $p(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j$ (Darstellung in Monom-Basis)

Dann ist

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x_k^j = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j\,dx = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \int_a^b x^j\,dx$$

$$\parallel$$

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \sum_{k=0}^{n} a_k x_k^j$$

D.h. für alle $j = 0, \dots, n$ muss gelten:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k^j = \int_a^b x^j \, dx = \frac{1}{j+1} x^{j+1} \Big|_a^b = \frac{1}{j+1} \left(b^{j+1} - a^{j+1} \right) =: f_j$$

$\Rightarrow$ lineares Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}}_{=: A} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

A^T bzw A ist nicht-singulär $\Rightarrow$ eindeutige Lösung für $a_0, a_1, \dots a_n$

Aufg 4: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

z.z: $m = 3$.

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2 = 1 + 1 \quad \checkmark$$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} = 0 = \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \checkmark$$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3} \quad \checkmark$$

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1} = 0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \quad \checkmark$$

$$\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5} \neq \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{9} \quad ↯$$

$\Rightarrow \quad m = 3$