2. Tutorium : Normen & Konditionszahl

Definition: $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt <u>Norm</u> falls $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (Homogenität)

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Δ-Ungl.)

$\|x-y\|$ ist der Abstand zwischen x und y <u>bzgl.</u> dieser Norm

Bsp

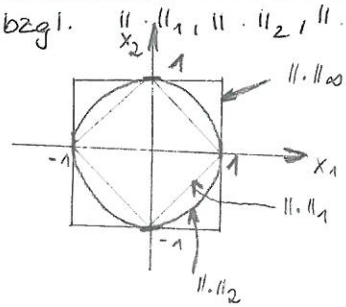
$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ Betragssummennorm

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$ Euklidische Norm

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$ $1 \leq p \leq \infty$ p-Norm

$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ Maximumnorm

$\longrightarrow$ „<u>Einheitskreis</u>" im $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$



$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$

Es gilt: $|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Hölders Ungl.)

$|x^T y| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$ Cauchy-Schwarz Ungleichung

---

Aufgabe 1

a) z.z.: $\|x\|_\infty \overset{(1)}{\leq} \|x\|_2 \overset{(2)}{\leq} \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

(1) $\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \underset{\exists j \in \{1,\dots,n\}}{=} |x_j| = \sqrt{|x_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \|x\|_2$

(2) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$

b) z.z. $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2} \leq \sqrt{\sum \underbrace{\|x\|_\infty^2}_{\text{"}\max |x_j|}} = \sqrt{n \cdot \|x\|_\infty^2} = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$

c) z.z. $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_2$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot 1 = x^T \underset{[1,\dots,1]^T}{\mathbb{1}} \underset{C.S.}{\leq} \|x\|_2 \cdot \|\mathbb{1}\|_2 = \|x\| \cdot \sqrt{n}$

d) z.z.: $\|x\|_1 \leq n\, \|x\|_\infty$

$\|x\|_1 = \sum |x_i| \leq n \cdot |x_j| = n \cdot \|x\|_\infty$

- Alle Normen im $\mathbb{R}^2$ sind äquivalent, d.h. $\exists\ c_1, c_2 > 0 \in \mathbb{R}$:

$c_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c_2 \|x\|_a \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$

Matrixnormen

Definition: $f: \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ heißt Matrixnorm falls $\forall\ A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & f(A) \geq 0 \ ; \ f(A) = 0 \iff A = 0 \\ (2) & f(A+B) \leq f(A) + f(B) \\ (3) & f(\alpha A) = |\alpha| \cdot f(A) \end{array}\right\} \quad (*)$$

- Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf dem $\mathbb{R}^n$, dann wird für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ durch

$$\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

eine Matrixnorm induziert.

- Für induzierte Matrixnormen gilt:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$
$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\text{"Konsistenz"})$$

- NICHT alle Matrixnormen definiert durch (*) erfüllen die Konsistenzbdg.

z.B. $\|A\| := \max_{i,j} |a_{ij}|$

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \|A \cdot B\| > \|A\|\,\|B\|$$

Beispiele:

$\|A\|_F = \left(\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$ Frobenius norm

$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ Spaltensummennorm

$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ Zeilensummennorm

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$ Spektralnorm

($\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ EW von } A\}$ ... Spektralradius

Es gilt: $\|A^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{min}(A^T A)}}$ denn $\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho((A^{-1})^T A^{-1})}$

$= \sqrt{\rho(AA^T)^{-1}}$ und

λ EW von $A \iff \frac{1}{\lambda}$ EW von A^{-1}

λ EW von $A \iff \lambda$ EW von A^T

Beispiel $\rho(A)$ ist keine Norm!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(A) = 0 \quad \text{aber} \quad A \neq 0$$

Aufgabe 2

1) $\|A \cdot B\| = \max_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \|A\| \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\|\,\|B\|$

2) $\dfrac{1}{\|A^{-1}b\|} = \dfrac{\|A\|}{\|A\|\,\|A^{-1}b\|} \leq \dfrac{\|A\|}{\|AA^{-1}b\|} = \dfrac{\|A\|}{\|b\|}$

3) z.z.: $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1,\dots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

$$\leq \left(\max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j| \right)}_{=1}$$

Folglich: $\|Ax\|_1 \leq \max\limits_{j=1,\dots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Um die Gleichheit zu zeigen, wählen wir $j_0 \in \{1,\dots,n\}$ so dass

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}| = \max_{j \in \{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Mit $\bar{x} = [0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ j_0}}{1},0,\dots,0]^T \in \mathbb{R}^n$ gilt dann

$\|\bar{x}\|_1 = 1$ und $\|A\bar{x}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij_0}| \leq \|A\|_1$

4) z.z. $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Es sei $\|x\|_\infty = 1$ und $Ax = y$ dann gilt

$$\|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |y_i| = \max_{i=1,\dots,n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j|$$

$$\leq \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \underbrace{\|x\|_\infty}_{=1}$$

$\Rightarrow$ bleibt zu zeigen, dass Gleichheit eintritt

Es gelte $\max\limits_{i=1,\dots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}|$

Wähle $x = (a_{k1}/|a_{k1}|, \dots, a_{kn}/|a_{kn}|)^T$. Folglich $\|x\|_\infty = 1$

und für $y = \|Ax\|$ gilt $y_k = \sum\limits_{j=1}^{k} |a_{kj}|$ also

$$\|A\|_\infty \geq \|y\|_\infty \geq \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \;//$$

5) z.z.: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$

$$\|A\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} (Ax)^T(Ax)$$

$$= \max_{\|x\|_2=1} x^TA^TAx$$

A^TA ist positiv semidefinit und symmetrisch

$\Downarrow$ $\exists$ eine orthogonale Matrix U ($U^T=U^{-1}$) (bestehend aus den Eigenvektoren von A^TA) so dass

$$U^TA^TAU = D \qquad (D \ldots \text{Diagonalmatrix mit reellen, nichtnegativen EW von } A^TA)$$

$\rightarrow$ Substitution $\quad y = U^Tx$

$$\|x\|_2 = \max_{\|Uy\|_2=1} \langle A^TAUy, Uy\rangle \qquad y^T\underbrace{U^TA^TAU}_{=D}y$$

$$= \max_{\|y\|_2=1} \langle Dy, y\rangle$$

$$= \max_{\|y\|_2=1} (\lambda_1|y_1|^2 + \ldots + \lambda_n|y_n|^2) = \lambda_{max} \quad //$$

6) $$\|A\cdot B\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (A(i,:)\cdot B(:,j))^2$$

$$\overset{C.S.}{\leq} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \|A(i,:)^T\|_2^2 \cdot \|B(:,j)\|_2^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \|A(i,:)^T\|_2^2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^p \|B(:,j)\|_2^2\right)$$

$$= \|A\|_F^2 \cdot \|B\|_F^2$$

7) $$\|Ax\|_2^2 = \left\|\begin{bmatrix} A(1,:)x \\ \vdots \\ A(n,:)x \end{bmatrix}\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \langle A(i,:)^T, x\rangle$$

$$\overset{C.S.}{\leq} \sum_{i=1}^n \|A(i,:)^T\|_2^2 \; \|x\|_2^2$$

$$= \|x\|_2^2 \; \|A\|_F^2$$

8) $$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \overset{7)}{\leq} \max_{\|x\|_2=1} \|A\|_F \underbrace{\|x\|_2}_{=1} = \|A\|_F \quad \text{und}$$

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n \|A(i,:)^T\|_2^2 \cdot 1 \leq \|A\|_2^2 \cdot \underbrace{\|1\|_2^2}_{=n}$$

//

Kondition einer Matrix

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht singulär, dann heißt

$$\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Konditionszahl von A bzgl. $\|.\|$.

Motivation:

$Ax = b \Rightarrow$ Lösung $x = A^{-1} b =: f(b)$

$$Df|_b = A^{-1} \Rightarrow \kappa_{rel} = \frac{\|Df|_b^T\| \, \|b\|}{\|f(b)\|} = \frac{\|A^{-1}\| \, \|b\|}{\|A^{-1} b\|} = \frac{\|A^{-1}\| \, \|Ax\|}{\|x\|}$$

$$\leq \|A^{-1}\| \, \|A\|$$

Schranke für κ_{rel}

Aufgabe 3

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad 2 \times 2 \rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \kappa_1(A) = 7 \cdot 3 = 21$

$\Rightarrow \kappa_\infty(A) = 6 \cdot \frac{7}{2} = 21$

$\Rightarrow \kappa_F(A) = \sqrt{4+9+4+16} \cdot \sqrt{4+9/4+1+1} = \sqrt{33} \cdot \sqrt{\frac{33}{4}} = \frac{1}{2} \cdot 33$
$= 16{,}5$

LR-Zerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht singulär

$$A = LR \quad \text{mit} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ * & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots * & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{bmatrix}$$

heißt LR-Zerlegung von A

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt LR-Zerlegung $\Leftrightarrow \det(A(1:k, 1:k)) \neq 0 \; \forall \; k = 1, 2, \dots, n-1$
  (es treten also keine Null Pivots auf)
- Lösen von lin. Gleichungssystemen mit Hilfe der LR-Zerlegung

$$Ax = b \qquad b \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow L \underbrace{Rx}_{=y} = b$$

1. Löse $Ly = b$ Vorwärtseinsetzen
2. Löse $Rx = y$ Rückwärtseinsetzen

Zur Verbesserung der Stabilität des Algorithmus verwendet man sogenannte <u>PIVOTISIERUNG</u>

$\Rightarrow$ <u>partielle Pivotisierung</u>

tausche das betragsmäßig größte Element der aktuellen Spalte in die Diagonalposition um sehr kleine bzw. Null-Pivots zu vermeiden

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Permutationsmatrix}}}{P} A = LR$$

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * \cdots & * \\ \vdots & 0 & \tilde{a}_{33} \cdots & \tilde{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{n3} \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Löse dann $LRx = Pb$

<u>Aufgabe 4</u>

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

a)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} \xrightarrow[\text{III} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \text{I}]{\text{II} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \text{I}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \hat{=} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}}$$

$$\xrightarrow{\text{III} - \frac{a_{32}}{a_{22}} \text{II}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; R = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Löse $Ax = b$ mit $b = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 3 \end{bmatrix}$

$Ly = b$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$

$Rx = y$ $\quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Probe

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 3 \end{bmatrix}$$

c) mit partieller Pivotisierung:

$$LR = PA$$

$$\underset{A^{(1)}}{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}} \xrightarrow[P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}]{} \underset{A^{(2)}}{\begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}} \xrightarrow{II - \frac{a_{21}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} I} \underset{A^{(3)}}{\begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \\ -1/2 & 15/2 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\xrightarrow[P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}]{} \underset{A^{(4)}}{\begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ -1/2 & 15/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}} \xrightarrow{III - \frac{a_{32}}{a_{22}} II} \underset{A^{(5)}}{\begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ -1/2 & 15/2 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Longrightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ 0 & 15/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = P_2 P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$