4 Tutorium (ITERATIONSVERFAHREN)

▷ Idee Iterativer Verfahren:

Löse $Ax = b$ als Fixpunktproblem $x = Sx + c$ $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow x^{(i+1)} = Sx^{(i)} + c$$

① EINDEUTIGKEIT der Lösung

$$(I - S)x = c \iff (I - S) \text{ invertierbar}$$

② KONSISTENZ der Lösung

$$x = (I-S)^{-1}c \overset{!}{=} A^{-1}b \iff A^{-1}b = (I-S)^{-1}c$$

③ KONVERGENZ

Das Verfahren konvergiert für alle Startvektoren $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegen die Lsg. $\bar{x} = S\bar{x} + c$

$$\iff \rho(S) < 1$$

Beweis:

$$x^{(i+1)} - \bar{x} = Sx^{(i)} - S\bar{x} = S(x^{(i)} - \bar{x}) = S^{i+1}(x^{(0)} - \bar{x})$$

Nach Satz aus der Übung gilt: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ Norm, so dass $\|S\| \leq \rho(S) + \varepsilon$

Wähle $\varepsilon = \dfrac{1 - \rho(S)}{2} \Rightarrow \|S\| < 1$

$$\Rightarrow \|x^{(i+1)} - \bar{x}\| \leq \|S\|^{i+1} \|x^{(0)} - \bar{x}\|$$

Sei $\rho(S) \geq 1$ dann gilt $\|S^i\| \geq \rho(S^i) = \rho(S)^i \geq 1\ \forall i$

und $\|x^{(i+1)} - \bar{x}\| \not\to 0$

④ FEHLERREKURSION

$$e_i := x^{(i)} - \bar{x}$$

$$e_{i+1} := x^{(i+1)} - \bar{x} = Sx^{(i)} + c - S\bar{x} - c = S(x^{(i)} - \bar{x}) = Se_i$$

S ... Fehlerfortpflanzungsmatrix

▷ Beispiele für die Wahl von S:

a) $A\bar{x} = b \iff \bar{x} = \bar{x} + (b - A\bar{x}) = (I - A)\bar{x} + b$

$$\Rightarrow x^{(i+1)} = (I - A)x^{(i)} + b$$

$$\Rightarrow S = I - A \quad \underline{\text{aber}} \quad \rho(I - A) \geq 1\ !$$

b) $A\bar{x} = b \iff \bar{x} = \bar{x} + A^{-1}(b - A\bar{x})$

$$\Rightarrow x^{(i+1)} = x^{(i)} + A^{-1}(b - Ax^{(i)}) = A^{-1}b = \bar{x}$$

$\rightsquigarrow$ Sofort fertig <u>aber</u> A^{-1} wird benötigt

$$S = 0$$

c) Betrachte Näherungsinverse, die leicht zu berechnen ist

$B^{-1} \approx A^{-1}$

$$\Rightarrow \quad x^{(i+1)} = x^{(i)} + B^{-1}(b - Ax^{(i)})$$

$$x^{(i+1)} = (I - B^{-1}A)x^{(i)} + B^{-1}b$$

$$S = I - B^{-1}A$$

falls $B^{-1}A \approx I \Rightarrow \rho(S) < 1$ (noch besser $\rho(S) \approx 0$)

<u>Betrachte Zerlegung:</u> $A = L + D + R$

a) <u>Jacobi Verfahren o. Gesamtschrittverfahren (GSV)</u>

wähle $B = D$ (nicht singulär!)

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + D^{-1}(b - Ax^{(i)}) = (I - D^{-1}A)x^{(i)} + D^{-1}b$$

mit $S = I - D^{-1}A = I - D^{-1}(L + D + R) = -D^{-1}(L + R)$

oder $x_k^{(i+1)} = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j^{(i)}\right) \quad k = 1, \dots, n$

b) <u>Gauss - Seidel Verfahren o. Einzelschrittverfahren (ESV)</u>

wähle $B = L + D$ nicht singulär

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + (L+D)^{-1}(b - Ax^{(i)}) = (L+D)^{-1}(b - Rx^{(i)})$$

mit $S = -(D+L)^{-1}R$

oder $x_k^{(i+1)} = 1/a_{kk}\left(b_k - \sum_{j<k} a_{kj} x_j^{(i+1)} - \sum_{j>k} a_{kj} x_j^{(i)}\right) \quad k = 1, \dots, n$

<u>Aufgabe 1:</u>

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R}$$

a) GSV: $S = I - D^{-1}A$

$$= -D^{-1}[L + R] = -\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

EW von S: $\lambda^2 - 2/3 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}}}$

$$\Rightarrow \rho(S) = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$$

$$x^{(1)} = S x^{(0)} + D^{-1} b$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/3 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

b) ESV

$$S = -(D+L)^{-1} \cdot R = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ +4/3 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

EW von $S \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 2/3$

$$\Rightarrow \rho(S) = 2/3 < 1$$

$$x^{(1)} = S x^{(0)} + (L+D)^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 + 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/3 \\ 13/3 \end{bmatrix} \quad //$$

Theorie:

GSV + ESV sind Spezialfälle von allg. Splittingverfahren

$\Rightarrow$ Zerlege $A = M - N$ (" Splitting ")

$\Rightarrow$ Wähle $B = M$ (nichtsingulär)

$$\Rightarrow x^{(i+1)} = x^{(i)} + M^{-1}(b - Ax^{(i)}) = M^{-1} N x^{(i)} + M^{-1} b$$

bzw. $M x^{(i+1)} = N x^{(i)} + b$

$$S = M^{-1} N$$

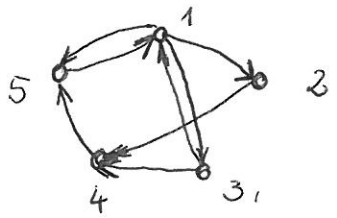
Definition:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = [a_{ij}]$ heißt

- strikt diagonal dominant, falls $|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$
- schwach diagonal dominant, falls $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$
- irreduzibel, falls $\forall\, i,j \in \{1,\dots,n\}\ a_{ij} \neq 0$ oder $\exists$ Indexfolge $i_1,\dots,i_s \in \{1,\dots,n\}: a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_s j} \neq 0$
  (d.h. im zugehörigen gerichteten Graphen kann jeder Knoten von jedem erreicht werden)
  sonst heißt A reduzibel
- irreduzibel diagonal dominant, wenn A irreduzibel und schwach diagonal dominant und $\exists\, l \in \{1,\dots,n\}$ mit $|a_{ll}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{n} |a_{lj}|$

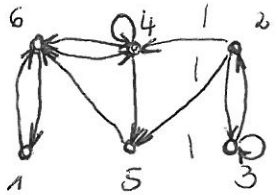
Bsp:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 & -13 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$



irreduzibel

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$



reduzibel

Aufgabe:

Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ strikt diagonaldominant mit $a_{ii} > 0 \quad \forall i$

z.z. A ist pos. def.

Beweis (Induktion über n)

i.A. $n = 1 \qquad A = [a_{11}] > 0$ ✓

i.S. $n-1 \to n$

Nach Voraussetzung ist $a_{11} > 0$

Gauss Elimination: wir eliminieren alle Elemente unterhalb und rechts von a_{11}

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{a_{12}}{a_{11}} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{1n}}{a_{11}} & & & 1 \end{bmatrix}}_{=:\alpha} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^T \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^T \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}$$

mit $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1i}\, a_{1j}}{a_{11}} \qquad i,j = 2, \dots, n \qquad [\tilde{A} \text{ ist symmetrisch}]$

Dann: A pos. def. $\Leftrightarrow$ $\tilde{A}$ pos. def.

d.h. wir müssen zeigen, dass $\tilde{A}$ strikt diagonal dominant

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} |\tilde{a}_{ij}| = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} \left| a_{ij} - \frac{a_{1i}\, a_{1j}}{a_{11}} \right| \leq \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} \left| \frac{a_{1i}\, a_{1j}}{a_{11}} \right|$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|}_{\leq a_{ii}} - |a_{i1}| + \left| \frac{a_{1i}}{a_{11}} \right| \underbrace{\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| - |a_{1i}|}_{\leq a_{11}}$$

da A strikt diagonaldominant

$$< |a_{ii}| - |a_{i1}| + \left| \frac{a_{1i}}{a_{11}} \right| \left(|a_{11}| - |a_{1i}| \right)$$

$$= |a_{ii}| - \frac{|a_{1i}\, a_{1i}|}{|a_{11}|} \leq \left| a_{ii} - \frac{a_{1i}\, a_{1i}}{a_{11}} \right| = |\tilde{a}_{ii}|$$

$$\forall\ i = 2, \dots, n$$

Theorie

Satz (VL)

- Sei A strikt diagonal dominant. Dann ist $\rho(S) < 1$ für $S = D^{-1}(L+R)$ und das Jacobi-Verfahren konvergiert.
- Ist A irreduziebel diagonal dominant dann konvergiert das Jacobi-Verfahren.

Aufgabe 3:

GSV zur Lösung von $Ax = 0$ mit

a) $x^{(0)} = [1, 1, 1]^T$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

A ist strikt diagonal dominant

$\Rightarrow$ GSV konvergiert $\forall\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

$$x^{(i+1)} = -D^{-1}(L+R)\, x^{(i)}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x^{(i)} = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{(i+1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{(i+1)} x^{(0)}$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{(i+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(i \to \infty)} 0$$

$$S = -\tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } \rho(S) = 1/2$$

b) $x^{(0)} = [1, 1, 1]^T$ $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

A nicht strikt diagonaldominant ↯. sofort keine Aussage über Konvergenz mgl.

$$x^{(i+1)} = \underbrace{-\begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{S} x^{(i)} = (-1)^{i+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x^{(0)}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to x^{(1)} = -\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = +\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = -\frac{1}{2} x^{(0)}$$

$\Rightarrow$ Konvergenz $\|x^{(i+1)}\|_\infty \to 0 \quad (i \to \infty)$

bzw. allg. $x^{(3)} = -\frac{1}{2} x^{(0)}$ ↯ Konvergenz $\forall\ x^{(0)}$; $\rho(S) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} < 1$ //

Aufgabe 4

$$A = (1+\omega)B - (C + \omega B) = B - C$$

und $B^{-1}C$ nichtsingulär mit EW $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n < 1$

i) Für welche $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ konv. das Splitting-Verfahren

$$(1+\omega) B x^{(i+1)} = (C + \omega B) x^{(i)} + b$$

für alle $x^{(0)} \in \mathbb{R}$?

$$S = [(1+\omega)B]^{-1}(C - \omega B) = \frac{1}{1-\omega}(B^{-1}C + \omega I)$$

$$\Rightarrow \rho(S) = \frac{1}{|1-\omega|}\rho(B^{-1}C + \omega I) = \frac{1}{|1-\omega|} \max_j |\lambda_j + \omega|$$

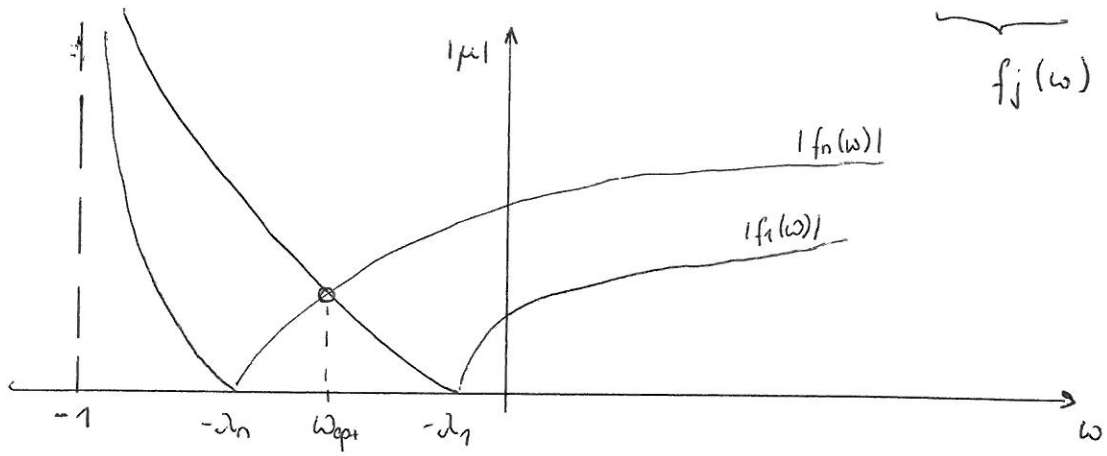
wobei $0 < \lambda_j < 1$ laut Voraussetzung

Eigenwerte von S: $\mu_j = \dfrac{\omega + \lambda_j}{1+\omega}$ $\quad j = 1, \ldots, n$

$$-1 < \frac{\omega + \lambda_j}{1+\omega} < 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

ii) Für welches ω ist $\rho(S)$ minimal?

$$\min_\omega \rho(S) = \min_\omega \{\max_j |\mu_j|\} = \min_\omega \{\max_j \underbrace{\left|\frac{\omega + \lambda_j}{1+\omega}\right|}_{f_j(\omega)}\} =: \omega_{opt}$$



$$\omega_{opt}: \quad \frac{\omega + \lambda_1}{1+\omega} = -\frac{(\omega + \lambda_n)}{1+\omega} \quad \Rightarrow \omega_{opt} = -\frac{(\lambda_1 + \lambda_n)}{2}$$

$$\Rightarrow \rho(S_{opt}) = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{2 - \lambda_1 - \lambda_n}$$