Tutorium 8 – Polynom-Interpolation

Geg: (x_k, f_k), $k = 0, \dots, n$ $\quad x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ (paarweise versch.)

Gesucht: glatte Fkt. $p(x)$ so dass $p(x_k) = f_k$ (Interpolationsbdg.) erfüllt ist.

Polyninterpolation:

$\exists!\ p \in \Pi_n = \{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \text{ Polynom vom Grad} \leq n \}$

d.h. $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ mit $p(x_k) = f_k$, $k = 0, \dots, n$

$\Rightarrow$ Bestimmung von p:

$$p(x_k) = f_k \Leftrightarrow a_0 + a_1 x_k + \dots + a_n x_k^n = f_k \qquad k = 0, \dots, n$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{=:V} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

lineares GLS

$=: V$ Vandermondsche Matrix

V ist regulär falls $x_i \neq x_j$

$$\left(\det V = \prod_{i=0}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (x_i - x_j) \right)$$

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung für $a_0\ a_1\ \dots\ a_n$

Problem:
- V extrem schlecht konditioniert
- Lösung des LGS teuer $\Theta(n^3)$

$\hookrightarrow$ **Ziel**: Berechnung von $p(x)$ in $\Theta(n^2)$

Auswertung von p an einer Stelle x in $\Theta(n)$

Idee: Wahl anderer Basis-Polynome zur Darstellung von p

- Lagrange Basispolynome $L_k(x) = \prod_{k \neq i = 0}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$ $\quad k = 0, \dots, n$

$\Rightarrow$ Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynoms:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot L_k(x)$$

[es gilt $L_k(x_j) = \delta_{kj}$!]

⊖ Auslöschung falls Stützstellen nah beieinander liegen

⊖ falls Stützstellen dazu kommen muß alles neu berechnet werden

Newton - Basispolynome

$$N_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \qquad k = 0, \dots, n$$

Newton Darstellung $\quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \dots, x_n] \; N_k(x)$

mit den dividierten Differenzen

$$f[x_i] := f_i$$

$$f[x_i, \dots, x_{i+m}] := \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+m}] - f[x_i, \dots, x_{i+m-1}]}{x_{i+m} - x_i}$$

Schema der dividierten Differenzen:

$$\begin{array}{lll}
x_0 & f_0 = f[x_0] & \\
 & & f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \\
x_1 & f_1 = f[x_1] & \qquad\qquad f[x_0, x_1, x_2] \\
\vdots & & \vdots \\
 & & \qquad\qquad \dots \quad f[x_0, \dots, x_n] \\
x_n & f_n = f[x_n] & f[x_{n-1}, x_n] = \dfrac{f[x_n] - f[x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}} \qquad f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]
\end{array}$$

⊕ hinzunahme neuer Stützstellen = problemlos

Aufgabe 1

a) Lagrange: $(n=2)$

x_i	-3	-1	2
f_i	10	-6	15

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(-3+1)(-3-2)} = \frac{1}{10}(x+1)(x-2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{(-1+3)(-1-2)} = -\frac{1}{6}(x+3)(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+3)(x+1)}{(2+3)(2+1)} = \frac{1}{15}(x+3)(x+1)$$

$$\Rightarrow p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x) = 10 \cdot \frac{1}{10}(x+1)(x-2) + (-6)\left(-\frac{1}{6}\right)(x+3)(x-2) + 15 \cdot \frac{1}{15}(x+3)(x+1)$$

$$= 3x^2 + 4x - 5$$

Newton:

$$\begin{array}{lll}
-3 & \boxed{10} & \\
-1 & -6 & \dfrac{-6-10}{-1+3} = \boxed{-8} \\
2 & 15 & \dfrac{15-(-6)}{2-(-1)} = 7 \qquad \dfrac{7-(-8)}{2-(-3)} = \dfrac{15}{5} = \boxed{3}
\end{array}$$

$$\Rightarrow p(x) = 10 \cdot \underbrace{1}_{N_0(x)} + (-8)(x - x_0) + 3(x - x_0)(x - x_1)$$

$$= 3x^2 + 4x - 5$$

b)

x_i	-1	0	2
f_i	-3	4	6

Lagrange:
$$L_0(x) = \frac{1}{3}x(x-2)$$
$$L_1(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$$
$$L_2(x) = \frac{1}{6}x(x+1)$$
$$\Rightarrow p(x) = -3\,\frac{1}{3}x(x-2) + 4\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)(x-2) + 6\cdot\frac{1}{6}x(x+1)$$
$$= -x(x-2) - 2(x+1)(x-2) + x(x+1)$$
$$= -2x^2 + 5x + 4$$

Newto:

$$\begin{array}{lll} -1 & \boxed{-3} & \\ 0 & 4 & -\frac{4+3}{0+1} = \boxed{7} \\ 2 & 6 & -\frac{6-4}{2-0} = 1 \quad -\frac{1-7}{2-1} = \boxed{2} \end{array}$$

$$p(x) = -3 + 7(x+1) - 2(x+1)x$$
$$= -2x^2 + 5x + 4$$

Hermite - Interpolation

Sind neben den Funktionswerten auch Werte für die Ableitungen gegeben verwendet man

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad \text{falls } x_0 = x_1 = \dots = x_k$$

Aufgabe 2

2.2: für $x_0 \in \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ m-mal stetig diff'bar gilt:

$$\lim_{h \to 0} f[x_0, x_0+h, \dots, x_0+mh] = \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0).$$

Beweis

Sei $h \neq 0$ und o.B.d.A. $h > 0$

Weiter sei $p_h \in \Pi_m$ das eind. Interpolationspolynom zu f in den Stützstellen $x_0, x_0+h, \dots, x_0+mh$

$\Rightarrow r_h(x) := f(x) - p_h(x)$ hat $m+1$ NST

$\overset{MWS}{\Rightarrow} r_h(x)$ hat m versch. NST

$\overset{MWS}{\Rightarrow} r_h^m(x)$ hat <u>eine</u> NST $\xi_h \in [x_0 - mh, x_0 + mh]$

Nach Newton gilt:

$$p_h(x) = \sum_{i=0}^{m} f[x_0, \dots, x_0 + ih] \prod_{j=0}^{i-1} (x - (x_0 + jh)) \quad \underline{\text{und}}$$

$$f[x_0, x_0+h, \dots, x_0+mh] = \frac{1}{m!} p_h^{(m)}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 0 = r_h^{(m)}(\xi_h) = f^{(m)}(\xi_h) - p_h^{(m)}(\xi_m) = f^{(m)}(\xi_h) - m!\, f[x_0, x_0+h, \dots, x_0+mh]$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f[x_0, x_0+h, \dots, x_0+mh]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{m!} f^{(m)}(\xi_h) \underset{f^{(m)} \text{ stetig}}{=} \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0) \quad //$$

$\Rightarrow$ <u>Erweitertes Schema für divid. Differenzen</u>

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & f[x_0,x_1] & & & \\
x_1 & f_1 & & \dfrac{f_1' - f[x_0,x_1]}{x_1 - x_0} =: f[x_0,x_1,x_1] & & \\
 & & \frac{1}{1!} f_1' & & f[x_0,x_1,x_1,x_1] & \\
x_1 & f_1 & & \frac{1}{2!} f_1'' & & \dots \\
 & & \frac{1}{1!} f_1' & & \dfrac{f[x_1,x_2] - f_1'}{x_2 - x_1} =: f[x_1,x_1,x_2] & \\
x_1 & f_1 & & & & \\
 & & \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = f[x_1,x_2] & & & \\
x_2 & f_2 & & & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow p(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_1](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+ f[x_0,x_1,x_1,x_1](x-x_0)(x-x_1)^2$$
$$+ f[x_0,x_1,x_1,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)^3 + \dots$$

<u>Aufgabe 3</u>

a) geg: $p(1) = 1$, $p'(1) = 2$, $p''(1) = 4$, $p(3) = 5$

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & 1 & \boxed{1} & & & \\
 & & & f_0' = \boxed{2} & & \\
x_0 & 1 & 1 & & \frac{1}{2!} f_0'' = \frac{1}{2} 4 = \boxed{2} & \\
 & & & f_0' = 2 & & \\
x_0 & 1 & 1 & & \dfrac{2-2}{3-1} = 0 & \\
 & & & \dfrac{5-1}{3-1} = 2 & & \dfrac{0-2}{3-1} = -\dfrac{2}{2} = \boxed{-1} \\
x_1 & 3 & 5 & & &
\end{array}$$

$$p(x) = 1 + 2(x - x_0) + 2(x - x_0)^2 - 1\,(x - x_0)^2 (x - x_0)$$
$$= -x^3 + 5x^2 - 5x + 2$$

b) $p(-1) = -3 \quad p(0) = 1 \quad p'(0) = -5 \quad p''(0) = 8 \quad p(2) = 15$

$p'(2) = -1 \quad p''(2) = 4$

x_0	-1	$\boxed{-3}$										
			$\frac{1+3}{0+1} = \boxed{4}$									
x_1	0	1		$\frac{-5-4}{0+1} = \boxed{-9}$								
x_1	0	1	-5		$\frac{4+9}{0+1} = \boxed{13}$							
x_1	0	1	-5	$\frac{1}{2} \cdot 8 = 4$		$\frac{1-13}{2+1} = \boxed{-4}$						
x_2	2	15	$\frac{15-1}{2} = 7$		$\frac{6-4}{2-0} = 1$		$\frac{-5-1}{2-0} = -3$					
x_2	2	15	-1	$\frac{7+5}{2-0} = 6$		$\frac{-4-6}{2-0} = -5$		$\frac{3+5}{2-0} = 4$				
x_2	2	15	-1		$\frac{-1-7}{2-0} = -4$		$\frac{2+4}{2-0} = 3$					
				$\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$								

$$\frac{-3+4}{2+1} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{4+3}{2-0} = \frac{7}{2} \qquad \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{3}}{2+1} = \boxed{\frac{19}{18}}$$

$$p(x) = -3 + 4(x+1) - 9(x+1)x + 13(x+1)x^2 - 4(x+1)x^3 + \frac{1}{3}(x+1)x^3(x-2) + \frac{19}{18}(x+1)x^3(x-2)^2$$

$\Rightarrow$ Wenn noch Zeit sein sollte Horner-Schema erklären

$$p(x) = \cancel{a_0 + a_1 x} \; a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

an der Stelle $x = x_0$

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	$a_5 \cdot x_0$	$b_0 \cdot x_0$	$b_1 \cdot x_0$	$b_2 x_0$	$b_3 x_0$
a_5	$a_4 + a_5 \cdot x_0 = b_0$	$a_3 + b_0 \cdot x_0 = b_1$	$a_2 + b_1 x_0 = b_2$	$a_1 + b_2 x_0 = b_3$	$a_0 + b_3 x_0 = p(x_0)$

$\cdot x_0$

Aufgabe 4

$f(x) = \frac{1}{a^2 - x}$

$\Rightarrow f$ ist auf $[-4,-1]$ 4x stetig diffbar

$\Rightarrow \forall\, x \in [-4,-1]\ \exists$ ein $\xi \in [-4,-1]$

$$f(x) - p(x) = \omega(x)\,\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \quad \text{mit} \quad \omega(x) = \prod_{i=0}^{3} (x - x_i)$$

$f(x) = \frac{1}{a^2-x} = (a^2-x)^{-1}$

$f'(x) = (a^2-x)^{-2}$

$f''(x) = 2(a^2-x)^{-3}$

$f'''(x) = 6(a^2-x)^{-4}$

$f^{(4)}(x) = 24(a^2-x)^{-5}$

$\Rightarrow |f(x) - p(x)| = \left|\omega(x)\, 24\, \frac{(a^2-\xi)^{-5}}{24}\right| = |\omega(x)|\,|a^2-\xi|^{-5}$

$\omega(x) = (x-4)(x+3)(x+2)(x+1)$
$= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$

$\omega'(x) = 4x^3 + 30x^2 + 70x + 50 = 4\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$

Extremwerte von $\omega(x)$ auf $[-4,-1]$

am Rand: $\omega(-4) = 0 \quad \omega(-1) = 0$

im Innern: $\omega\left(-\frac{5}{2}\right) = -1$; $\omega\left(-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) = -1$, $\omega\left(-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = 0{,}562$

$\Rightarrow |\omega(x)| \leq 1 \quad \forall\, x \in [-4,-1]$

$\Rightarrow |f(x) - p(x)| \leq |a^2 - \xi|^{-5}$

gesucht: alle a, so dass $|a^2 - \xi|^{-5} \leq 10^{-5}$

$\Leftrightarrow |a^2 - \xi|^5 \geq 10^5$

$\Leftrightarrow |a^2 - \xi| \geq 10$

Da $a^2 \geq 0$ und $\xi \in [-4,-1] \Rightarrow a^2 - \xi > 0$

$\Rightarrow a^2 \geq 10 + \xi$

$\Leftrightarrow |a| \geq \sqrt{10+\xi}$

Da $\xi \leq -1 \Rightarrow \sqrt{10-\xi} \leq \sqrt{9} = 3$

$\Rightarrow \forall\, a \in\ ]-\infty, -3] \cup [3, \infty[$ //