Technische Universität Berlin **Wintersemester 2014/2015**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Jeroen Stolwijk

Numerische Mathematik I

2. Übungsblatt: Normen, Konditionszahl, LR-Zerlegung

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 12. November 2014)

Aufgabe 1: **(5 Punkte)**
Sei $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Durch $\|x\|_Q := \langle x, Qx\rangle^{\frac{1}{2}}$ ist eine Norm definiert, wobei $\langle .,. \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Es gilt für die von $\|.\|_Q$ induzierte Matrixnorm

$$\|A\|_Q = \sqrt{\rho(Q^{-1}A^TQA)},$$

wobei ρ der Spektralradius ist:

$$\rho(B) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ Eigenwert von } B\}.$$

Aufgabe 2: **(6 Punkte)**
Seien $A, B, Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbare Matrizen und Q zusätzlich orthogonal, sowie $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Weiterhin sei eine submultiplikative Norm $\|.\|_*$ auf $\mathbb{R}^{n,n}$ gegeben. Zeigen Sie folgende Beziehungen:

(i) $\kappa_*(AB) \leq \kappa_*(A)\kappa_*(B)$,

(ii) $\kappa_*(\alpha A) = \kappa_*(A)$,

(iii) $1 \leq \kappa_2(A)$,

(iv) $\kappa_2(Q) = 1$,

(v) $\kappa_2(A) \leq \kappa_F(A) \leq n\kappa_\infty(A)$,

(vi) $\kappa_2(QA) = \kappa_2(A)$.

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**
Gegeben sei eine nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, wobei

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 1, \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

gelte. Zeigen Sie, dass für jede nichtsinguläre Diagonalmatrix D die folgende Ungleichung gilt:

$$\kappa_\infty(DA) \geq \kappa_\infty(A).$$

Aufgabe 4: **(5 Punkte)**
Sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Berechnen Sie die LR-Zerlegung mit partieller Pivotisierung von A.

2. Lösen Sie mit Hilfe der LR-Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ wobei $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Programmieraufgabe 1: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 13. November 2014)
Programmieren Sie die LR-Zerlegung mit partieller Pivotisierung und, dazu passend, das Vorwärts- und Rückwärts-Einsetzen. Schreiben sie dazu eine Funktion

```
function fact = lr_zerlegung(A)
```

welche die LR-Zerlegung mit partieller Pivotisierung einer Matrix berechnet und in der Struktur `fact` (`>> help struct`) speichert. Schreiben Sie eine weitere Funktion

```
function x = vor_rueck(fact, b)
```

die `fact` aus der Funktion `lr_zerlegung(A)` und einen Vektor `b` übergeben bekommt und damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ löst.
Benutzen Sie hierzu die auf der Webseite des Kurses hinterlegten Templates und zum Testen der Funktionen die Datei `RUNME.m`. Für die Abgabe der Programmieraufgabe muss die Datei fehlerfrei durchlaufen und eine Ausgabe produzieren, die in etwa wie in Abbildung 1 aussieht.

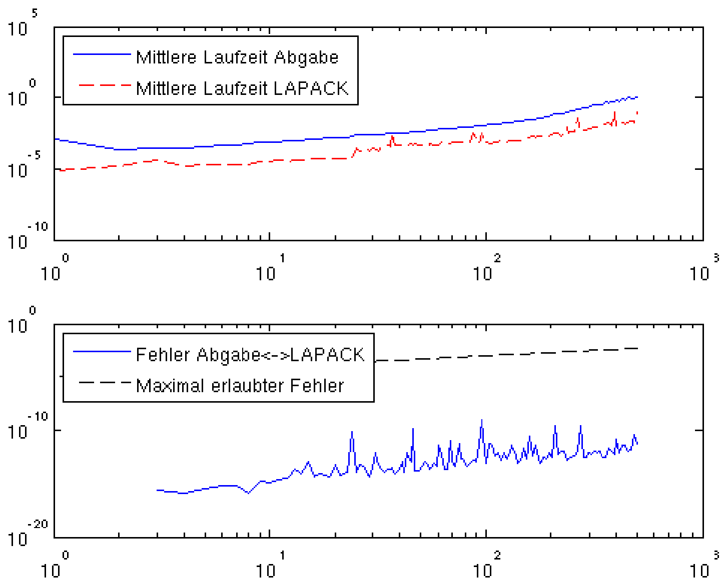

Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgabe von RUNME

Übungsaufgabe für die Tutorien (03.11-07.11.2014):

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass die folgenden Ungleichungen gelten für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$

b) $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$

c) $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$

d) $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

Aufgabe 2:
Es bezeichne $\|.\|$ eine Vektornorm auf dem $\mathbb{R}^n$ und gleichzeitig

$$\|A\| := \max \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

die induzierte Matrixnorm. Es bezeichnen A, B geeignete Matrizen und $b \neq 0$ einen Vektor mit passenden Dimensionen. Zeigen Sie:

1. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$,
2. $\frac{1}{\|A^{-1}b\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$.

Ausserdem zeigen Sie, dass für die speziellen Normen $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$, $\|.\|_F$ gilt:

3. $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$ (wobei $\lambda_{\max}(A)$ den größten Eigenwert von A bezeichnet)
4. $\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F$, d.h. Submultiplikativität der Frobeniusnorm,
5. $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F\|x\|_2$, für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$, d.h. Verträglichkeit von $\|.\|_F$ mit $\|.\|_2$,
6. $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die Kondition der Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ bezüglich $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$ und $\|.\|_F$.

Aufgabe 4:
Sei

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

(c) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit partieller Pivotisierung.