Technische Universität Berlin **Wintersemester 2014/2015**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Jeroen Stolwijk

Numerische Mathematik I

3. Übungsblatt: Cholesky-Zerlegung, Singulärwertzerlegung

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 19. November 2014)

Aufgabe 1: **(4 Punkte)**
Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung und die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 & -6 \\ -2 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 13 & -18 \\ -6 & 5 & -18 & 33 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 12 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2: **(6 Punkte)**
Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} R & v \\ w^T & 0 \end{bmatrix}, \quad R \in \mathbb{R}^{n\times n},\ v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Zusätzlich sei R eine invertierbare obere Dreiecksmatrix.

(a) Geben Sie die LR-Zerlegung der Matrix A an.

(b) Zeigen Sie, dass A genau dann nichtsingulär ist, wenn $w^T R^{-1} v \neq 0$.

(c) Formulieren Sie einen Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ und geben Sie den Aufwand in Abhängigkeit von n an.

Aufgabe 3: **(4 Punkte)**

Man berechne die Singulärwertzerlegung von $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Aufgabe 4: **(6 Punkte)**
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit Rang r, $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung und $A^+ = V\Sigma^+ U^T$ ihre Pseudoinverse. Man zeige:

(i) Ist A regulär, dann gilt $A^+ = A^{-1}$.

(ii) Ist $r = n$, dann $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.

(iii) AA^+ ist die orthogonale Projektion auf $\mathrm{Bild}(A)$.

(iv) $A^+ A$ ist die orthogonale Projektion auf $\mathrm{Kern}(A)^\perp$.

Zur Erinnerung: Die orthogonale Projektion P eines Vektorraums V auf einen Unterraum U ist definiert durch: $P(v) \in U$ und $P(v) - v \in U^\perp$ für alle $v \in V$.

Programmieraufgabe 3: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 20. November 2014)
Schreiben Sie ein Programm `cholesky` welches die Cholesky-Zerlegung GG^T einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ berechnet, wobei G eine untere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen ist. Der Aufruf soll mit

```
G=cholesky(A)
```

erfolgen und als Eingabe eine symmetrische, positiv definite $n \times n$ Matrix `A` erhalten. Als Rückgabe `G` soll die Funktion eine Matrix der Größe $n \times n$ liefern, wobei `G` die untere Dreiecksmatrix G ist.
Schreiben Sie außerdem ein Programm `C_rekursion`, welches ausgehend von der berechneten Cholesky-Zerlegung die Lösung des Gleichungssystems $GG^T x = b$ berechnet:

```
x=C_rekursion(G,b)
```

mit der Eingabe `G`, wie bei der Ausgabe in `cholesky`, sowie `b` ein Vektor der Länge n. Ausgegeben werden soll `x`, die numerisch berechnete Lösung.
Vergleichen Sie Ihren Algorithmus mit dem Testbeispiel aus Hausaufgabe 1. Verwenden Sie Ihren Algorithmus außerdem zur Lösung des Gleichungssystems $Hx = b$ mit

$$H = [h_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad h_{ij} = (i + j - 1)^{-1},$$

$x = [1, 1, \ldots, 1]^T$ und $b = Hx$. Vergleichen Sie für $n = 2, 3, 4, \ldots, 30$ die numerische Lösung $\tilde{x}_n$ mit der exakten Lösung x anhand des absoluten Fehlers $\max_i |\tilde{x}_n(i) - x(i)|$ und interpretieren Sie die Ergebnisse.
Hinweis: die Matlab Funktion `hilb(n)` liefert die Hilbertmatrix der Dimension n.

Übungsaufgabe für die Tutorien (10.11-14.11.2014):

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, und sei $A = GG^T$ die Cholesky-Zerlegung von A. Zeigen Sie:

(i) $\|G\|_2^2 = \max_{x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x} \geq g_{ii}^2$ für alle $i = 1, \ldots, n$,

(ii) $\frac{1}{\|G^{-1}\|_2^2} = \min_{x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x} \leq g_{ii}^2$ für alle $i = 1, \ldots, n$,

(iii) $\mathrm{cond}_2(G) \geq \max_{i,j} \frac{g_{ii}}{g_{jj}}$.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung von $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

Aufgabe 4:
Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ die Singulärwerte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass $\|A\|_2^2 = \max_{i=1,\ldots,r} \sigma_i^2$ und $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2$.