Technische Universität Berlin **Wintersemester 2014/2015**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Jeroen Stolwijk

Numerische Mathematik I

4. Übungsblatt: Iterative Lösung von Gleichungssystemen

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 26. November 2014)

Aufgabe 1: **(3 Punkte)**
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$ und seien $L, D, U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ der strikt-untere-, der diagonal- und der strikt-obere-Anteil von A. Sei $\omega \in (0,2)$.
In der Vorlesung wurde das SOR-Verfahren (Gauß-Seidel-Verfahren mit sukzessiver Überrelaxation) als die Iteration

$$x_k = S_\omega x_{k-1} + B^{-1}b \tag{1}$$

angegeben, wobei

$$S_\omega := (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U], \quad \text{und} \quad B := \frac{1}{\omega}(D+\omega L).$$

Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{R}^n$ Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist, genau dann wenn x ein Fixpunkt von (1) ist.

Aufgabe 2: **(7 Punkte)**
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $D = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zur Lösung der Gleichung $Ax = b$ soll das gedämpfte Jacobi-Verfahren

$$x_k = x_{k-1} + \omega D^{-1}(b - Ax_{k-1})$$

verwendet werden.

1. Stellen Sie die Iterationsmatrix S auf und zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von $D^{-1}A$ reell und positiv sind.
2. Seien $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ die Eigenwerte von $D^{-1}A$. Zeigen Sie, dass das Verfahren genau dann konvergiert, wenn $0 < \omega < \frac{2}{\lambda_n}$ gilt und bestimmen Sie den optimalen Parameter ω_{opt}, so dass der Spektralradius der Iterationsmatrix S minimal wird.

Aufgabe 3: **(7 Punkte)**
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit sowie $b \in \mathbb{R}^n$. Führt man das CG-Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ aus, so werden in jedem Schritt die Residuen der Form $r := Ax - b$ ausgerechnet.

1. Zeigen Sie, dass r gleich dem Gradienten des Energiefunktionals $\mathcal{J}(x) := \frac{1}{2}x^TAx - x^Tb$ ist, d.h., dass $r = \nabla\mathcal{J}(x)$.
2. Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nichtsingulär und $c \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass B^TB positiv definit ist. Zeigen Sie, dass x Lösung von $Bx = c$ ist, genau dann wenn x Lösung der Normalengleichung $B^TBx = B^Tc$ ist.
3. Es bezeichne $\{x_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^n$ die Folge der Iterierten des CG-Verfahrens mit $A = B^TB$ und $b = B^Tc$. Benutzen Sie einen Satz aus der Vorlesung um zu zeigen, dass

$$\|Bx_k - c\|_2 = \min_{x\in K_k(B^TB, B^Tc)} \|Bx - c\|_2,$$

für alle $k = 1, 2, \ldots$.

Finite Differenzen
Gegeben sei für $u \in C^2([0,1])$ das Randwertproblem mit homogenen Randdaten

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

wobei $f \in C([0,1])$ gelte. Zur näherungsweisen Lösung sei für den Parameter $n \in N$ das Gitter $x_i = i \cdot h$, $i = 0, \ldots, n$, mit $h = 1/n$ gegeben. Verwendet man zur Diskretisierung Finite Differenzen, so erhält man das Gleichungssystem

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

wobei $f_i = f(x_i)$ gesetzt wird. Dabei ist jede Komponente u_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ der Lösung des Gleichungssystems eine Näherung der exakten Lösung des kontinuierlichen Problems an der Stelle x_i, d.h. $u_i \approx u(x_i)$.

Programmieraufgabe 4: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 27. November 2014)
Schreiben Sie jeweils Programme zur iterativen Lösung des Gleichungssystems (2) durch das Gauß-Seidel und das gedämpfte Jacobi-Verfahren. Abkürzend werde das Gleichungssystem (2) als $Ay = b$ geschrieben. Der Aufruf der Programme soll mit

```
y = jacobi(b, y0, tol, kmax, omega)
```

bzw.

```
y = gaussseidel(b, y0, tol, kmax)
```

erfolgen. Eingabeparameter sind

`b`	Vektor b der rechten Seite
`y0`	Startvektor $y^{(0)}$ der Iteration
`tol`	Toleranz ϵ
`kmax`	maximale Anzahl von Iterationen k_{max}
`omega`	Relaxationsparameter ω des gedämpften Jacobi-Verfahrens.

Ausgabeparameter sind

`y`	Approximation der Lösung $A^{-1}b$.

Dabei soll die Iteration abgebrochen werden, falls die maximale Iterationszahl k_{max} überschritten wurde oder

$$\|Ay^{(k)} - b\|_2 + \|y^{(k)} - y^{(k-1)}\|_2 \le \epsilon$$

gilt.
Wenden Sie die programmierten Verfahren an, um das lineare Gleichungssystem (2) zu lösen. Bestimmen Sie jeweils die rechte Seite so, dass

$$u_i = \sin\left(\frac{\pi \cdot i}{n}\right), \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n-1$$

eine Lösung ist. Verwenden Sie als Startvektor $y^{(0)}$ den Nullvektor, $\epsilon = 10^{-4}$ und $k_{max} = 1000$. Für das gedämpfte Jacobi-Verfahren sei $\omega = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$. Tragen Sie die Norm des Fehlers der Iterierten für die Parameter $n = 10, 50, 100$ und die beiden Algorithmen im geeigneten Maßstab auf. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Übungsaufgabe für die Tutorien (17.11-21.11.2014):

Aufgabe 1:
Geben Sie für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ die Iterationsmatrix S und deren Spektralradius an; einmal für das Gesamtschrittverfahren und einmal für das Einzelschrittverfahren. Führen Sie mit jedem Verfahren einen Schritt aus mit Startwert $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ und rechter Seite $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass jede symmetrische und strikt diagonal dominante Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit positiven Diagonalelementen positiv definit ist. Geben Sie ein Beispiel einer positiv definiten Matrix, die nicht strikt diagonal dominant ist.

Aufgabe 3:
Untersuchen Sie die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens zur Lösung von $Ax = 0$ für den Startwert $x^{(0)} = [1, 1, 1]^T$, indem sie jeweils eine allgemeine Darstellung für die n-te Iterierte angeben.

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Aufgabe 4:
Betrachte das Splitting

$$A = (1 + \omega)B - (C + \omega B)$$

und $B^{-1}C$ sei nichtsingulär und habe positive reelle Eigenwerte

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n < 1.$$

1. Für welche $\omega \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$ konvergiert das Splitting-Verfahren

   $$(1 + \omega)Bx^{(i+1)} = (C + \omega B)x^{(i)} + b$$

   für alle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$?

2. Für welches ω ist die Konvergenzrate maximal, d.h. $\rho(S)$ minimal, wobei S die Iterationsmatrix des Verfahrens ist?