Technische Universität Berlin **Wintersemester 2014/2015**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Jeroen Stolwijk

Numerische Mathematik I

5. Übungsblatt: Fixpunktiteration, Newton-Verfahren

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 03. Dezember 2014)

Aufgabe 1: **(6 Punkte)**
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nichtsingulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und

$$\mathcal{K}_k(A, b) := \operatorname{span}\{b, Ab, \ldots, A^{k-1}b\}$$

der $k-$te Krylovraum bezüglich A und b. Zeige, dass fur jedes $k \geq 1$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Die Vektoren $b, Ab, \ldots, A^k b$ sind linear abhängig.

(ii) $\mathcal{K}_k(A, b) = \mathcal{K}_{k+1}(A, b)$.

(iii) $\mathcal{K}_k(A, b)$ ist A-invariant, d.h. $A\mathcal{K}_k(A, b) = \mathcal{K}_k(A, b)$.

(iv) Es existiert ein linearer Unterraum $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\dim(\mathcal{M}) \leq k$ für den gilt $b \in \mathcal{M}$ und $\mathcal{M}$ ist A- invariant.

(v) Für $x_* = A^{-1}b$ gilt $x_* \in \mathcal{K}_k(A, b)$.

Aufgabe 2: **(4 Punkte)**
Führen Sie eine Iteration des Newton-Verfahrens aus, um das nichtlineare Gleichungssystem

$$\exp(x^2 - y^2) - 3 = 0$$
$$x + y - \sin(2(x + y)) = 0$$

zu lösen. Benutzen Sie die Startwerte $x_0 = \pi$ und $y_0 = \pi$. An welcher Stelle ist das Differential singulär?

Aufgabe 3: **(7 Punkte)**
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine dreimal-stetig differenzierbare Funktion und $x^* \in \mathbb{R}$ eine einfache Nullstelle von f, d.h. es gelte $f(x^*) = 0$ aber $f'(x^*) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die durch

$$y := x_k - f'(x_k)^{-1} f(x_k)$$
$$x_{k+1} := y - f'(x_k)^{-1} f(y)$$

definierte Folge mindestens mit Ordnung 3 gegen x^* konvergiert.
Hinweis: Beschreiben Sie das Verfahren als Fixpunktiteration $x_{k+1} = \phi(x_k)$ und zeigen Sie, dass die Ableitungen $\phi'(x)$ und $\phi''(x)$ an der Stelle x^* verschwinden. Die Produktregel für drei Faktoren lautet: $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

Programmieraufgabe 5: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 04. Dezember 2014)
Schreiben Sie ein MATLAB-Programm für das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion $0 = f(x)$ und ein MATLAB-Programm zur Fixpunktiteration angewandt auf $x = f(x) + x$. Verwenden Sie als Beispielprobleme die Funktionen

1. $f(x) = e^x - \sin x$,
2. $f(x) = \sin x - e^x$,
3. $f(x) = \arcsin(e^x) - x,\ x < 0$, und
4. $f(x) = \ln \sin(x) - x$,

und als Startwerte $x_0 = -\pi/4,\ -5\pi/4,\ -9\pi/4$. Vergleichen Sie die Ergebnisse bzgl. Rechengenauigkeit, Rechenaufwand und Konvergenz.
Verwenden Sie hierfür das auf der Homepage bereitgestellte Hauptfile (`script.m`) und die Masken der zu schreibenden Unterprogramme `newton.m` und `fixpunkt.m` . Außerdem die Beispieldateien `phi1n.m`, welche die rechte Seite $f(x)$ der Gleichung $0 = f(x)$ enthält (für das Newton-Verfahren), `dphi1n.m`, welche die Ableitung $f'(x)$ der rechten Seite enthält (für das Newton-Verfahren) und `phi1f.m`, welche die rechte Seite $f(x) + x$ der Fixpunktgleichung $x = f(x) + x$ enthält (für das Fixpunktverfahren). Die Routinen `phi2n.m`, `dphi2n.m`, `phi2f.m`, `phi3n.m`, `dphi3n.m`, `phi3f.m`, `phi4n.m`, `dphi4n.m` und `phi4f.m` sind in analoger Weise zu schreiben.

Übungsaufgabe für die Tutorien (24.11-28.11.2014):

Aufgabe 1:
Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & c_1 \\ 1 & 0 & & & c_2 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & c_{n-1} \\ & & & 1 & c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N,$$

.

1. Berechne die eindeutige Lösung x^* des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.
2. Man zeige, dass das GMRES-Verfahren die Vektoren $x^{(1)} = x^{(2)} = \ldots, x^{(N-1)} = 0$ und $x^{(N)} = x^*$ liefert (d.h. das GMRES-Verfahren liefert in den Schritten $n = 1, 2, \ldots, N-1$ keine Approximation an die Lösung x^*, auch eine schrittweise Verbesserung tritt nicht auf).

Aufgabe 2:
Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_1 = 0, \quad \frac{10\,x_1}{x_1 + 0.1} + 2x_2^2 = 0,$$

dessen eindeutig bestimmte Lösung $(x_1, x_2) = (0, 0)$ ist.

(a) Führen Sie ausgehend von dem Startvektor $(0, 1)$ einen Newton-Schritt durch.

(b) Konvergiert das Newton-Verfahren in diesem Beispiel für alle genügend nahe an der Lösung liegenden Startvektoren? Geben Sie die maximale Teilmenge aller Punkte in der offenen Kugel um den Ursprung mit Radius 1/10, d.h. $U_{1/10}(0) = \{(x_1, x_2) \,|\, \|(x_1, x_2)\|_2 < 1/10\}$ an, so dass das Verfahren auf dieser Menge konvergiert.

Aufgabe 3:
Es seien $W, V \subset \mathbb{R}^n$ Teilräume mit $W \oplus V = \mathbb{R}^n$. Ferner seien die Spalten der Matrix X eine Basis von W und die Spalten von Z eine Basis von $V^\perp$. Zeigen Sie, dass dann

$$P := X(Z^T X)^{-1} Z^T \tag{1}$$

ein Projektor auf W entlang V ist. Zeigen Sie außerdem, dass die rechte Seite von (1) nicht von der Wahl der Basen X und Z abhängt.

Aufgabe 4:
Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ ein Teilraum und die Spalten der Matrix X_0 eine Orthonormalbasis von W. Dann ist

$$P := X_0 X_0^T$$

ein symmetrischer Orthogonalprojektor.

Aufgabe 5:
Geben Sie das Gram-Schmidt-Verfahren unter Benutzung von Projektoren an.